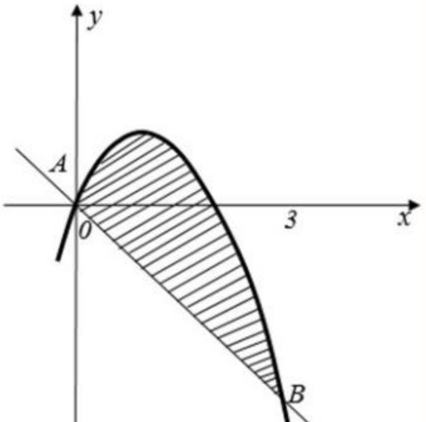
Мурзабаева А.Б.,
Аракеева А.М.

МАТЕМАТИКАЛЫК АНАЛИЗ

Практикалык колдонмо



II БӨЛҮК

Мурзабаева А.Б., Аракеева А.М.

МАТЕМАТИКАЛЫК АНАЛИЗ
2-БӨЛҮК
(Практикалык колдонмо)

Ош – 2025

УДК 517

ББК 22.16

М 91

Колдонмо ОшМУнун Окумуштуулар Кеңеши тарабынан басмага сунушталды.
2025-жылдын 30-июну. Протокол №9

Рецензенттер:
Ташболотов А. – физика-математика илимдеринин доктору, профессор
Сапарова Г. – физика- математика илимдеринин кандидаты, Ош технологиялык университетинин доценти

Мурзабаева А.Б., Аракеева А.М.
М 91 Математикалык анализ: 2-бөлүк: практикалык колдонмо: -Ош: -147 б.

ISBN 978-9967-06-175-0

Окуу колдонмо студентке математикалык анализ курсунун 2-семестринде маселелерди чыгарууда өз алдынча ыкмаларды колдонуп, мисалдарды чыгаруу көндүмдөрүнө ээ болууга жардам берүү болуп эсептелет.

Практикалык колдонмодо аныкталбаган интеграл, аныкталган интеграл жана анын геометриялык, механикалык жана физикалык колдонулуштары, аныкталган интегралдын экономикада колдонулушу бөлүмдөрү каралган.

Бул колдонмо кыргыз тилинде окуган математика, физика, колдонмо математика жана информатика, программалоо, экономика багытындагы жалпысынан математикалык анализ окуган бардык багыттагы студенттердин 1-курстарына 2-семестр үчүн арналат.

УДК 517
ББК 22.16

ISBN 978-9967-06-175-0

© Мурзабаева А., Аракеева А.,2025

МАЗМУНУ

БАП 1. АНЫКТАЛБАГАН ИНТЕГРАЛ

Киришүү ---5

§ 1.1. Түздөн-түз интегралдоо ---6

§ 1.2. Подстановка менен интегралдоо---------------------------------11

§ 1.3. Бөлүктөп интегралдоо -- 15

§ 1.4. Жөнөкөй бөлчөктөрдү интегралдоо ----------------------------21

§ 1.5. Рационалдык бөлчөктөрдү интегралдоо------------------------26

§ 1.6. Тригонометриялык функциялардан рационалдуу көз каранды функцияларды интегралдоо-----------------------------------38

§ 1.7. Тригонометриялык функциялардын кээ бир интегралдары ---47

§ 1.8. Кээ бир алгебралык иррационалдык функцияларды интегралдоо--51

§ 1.9. Интегралдоого аралаш мисалдар--------------------------------60

БАП 2. АНЫКТАЛГАН ИНТЕГРАЛ ЖАНА АНЫН КОЛДОНУЛУШТАРЫ

§ 2.1. Негизги формулалар --63

§ 2.2. Аныкталган интегралдарды эсептөөнүн ыкмалары----------68

§ 2.3. Аныкталган интегралдарды жакындаштырып эсептөө------78

§ 2.4. Өздүк эмес интегралдар--87

§ 2.5. Жалпак фигуралардын аянттары -------------------------------95

§ 2.6. Башка геометриялык колдонуштар----------------------------103
§ 2.7. Механикалык жана физикалык колдонулуштары-----------113

БАП 3. АНЫКТАЛГАН ИНТЕГРАЛДЫН ЭКОНОМИКАДА КОЛДОНУЛУШУ

§ 3.1. Интегралдын экономикалык мааниси-------------------------126
§ 3.2. Буюмдарды өндүрүүнун орточо убактысын табуу-------132
§3.3. Акча агымынын дисконттолгон наркын табуу---------------133
§3.4. Белгилүү инвестициялардан капиталды табуу---------------134
§ 3.5. Интегралдын финансыда колдонулушу ----------------------136
§ 3.6. Туруктуу өсүү темптери менен жабдууларды чыгаруу-----138
§ 3.7. Джини коэффициентин эсептөө --------------------------------139
§ 3.8. Экономикалык маселелердеги өздүк эмес интегралдар----141

Жооптор -- 142
Адабияттар---147

КИРИШҮҮ

Математикалык анализ боюнча практикалык колдонмонун максаты, студентке математикалык анализ курсунун 2-семестринде маселелерди чыгарууда өз алдынча ыкмаларды колдонуп, мисалдарды чыгаруу көндүмдөрүнө ээ болууга жардам берүү болуп эсептелет. Колдонмодо жөнөкөй мисалдар келтирилген. Жогорку татаалдыктагы мисалдар келтирилген эмес, максатыбыз студентти негизги мисалдарды чыгарууга үйрөтүү, анткени студенттин математикалык анализ курсунун бакалавр программасынын талаптарын өздөштүрүү үчүн зарыл болгон билимдерин берүү. Практикалык колдонмодо аныкталбаган интеграл, аныкталган интеграл жана анын геометриялык, механикалык жана физикалык колдонулуштары, аныкталган интегралдын экономикада колдонулушу бөлүмдөрү каралган.

Ар бир бөлүктө (бапта, параграфтарда) кыскача теориялык маалыматтар берилген жана маселени чечүү үчүн зарыл болгон формулалар келтирилген, көп мисалдар аларды чечүү ыкмаларын түшүндүрүү менен көрсөтүлгөн. Андан кийин өз алдынча иштөө үчүн мисалдардын катары жана алардын кээ бирлери көрсөтмөлөр менен берилген. Студентке чыгарылган мисалдар менен таанышуу окутуучу тараптан минималдык жардам көрсөтүлсө да берилген мисалдарды чыгаруунун негизги ыкмаларын өздөштүрүүгө мүмкүндүк берет.

Теориялык билимдерин тереңдетүү үчүн кыргыз тилиндеги “Математикалык анализ” 1-бөлүк, авторлор А.Бөрүбаев, К. Бараталиев, Бишкек 2019, М.Ш. Мамаюсупов “Жогорку математика боюнча окума” 2-бөлүк адабияттардан окуса болот.

Азыркы мезгилде математикалык анализ боюнча студенттер үчүн кыргыз тилиндеги мисалдардын чыгарылышы менен көрсөтүлгөн практикалык колдонмолор жетишпейт. Математикалык анализ азыркы математикалык курстардын негизги өзөгүн түзөт. Бул колдонмонун башка окуу куралдарынан айырмачылыгы 3-бапта анык интегралдын экономикадагы колдонулушу каралган. Ошондуктан, бул колдонмону математика, физика, колдонмо математика жана информатика, программалоо, экономика багытындагы жалпысынан математикалык анализ окуган бардык багыттагы студенттердин 1-курстарына 2-семестр үчүн сунуштайбыз.

БАП 1. АНЫКТАЛБАГАН ИНТЕГРАЛ

§ 1.1 ТҮЗДӨН-ТҮЗ ИНТЕГРАЛДОО

1. **Баштапкынын аныктамасы**. Берилген интервалда $f(x)$ функциясынын баштапкысы деп $F(x)$ функциясы аталат, эгерде бул интервалдын ар бир чекитинде

$$F'(x) = f(x); \tag{1}$$

ошондой эле бул функциянын бардык баштапкылары гана туюнтмада кармалат

$$F(x) + \mathrm{C}, \tag{2}$$

мында C —эркин турактуу.

Бардык баштапкылардын жыйындысы $f(x)$ функциясынын аныкталбаган интегралы деп аталат. Аныкталбаган интеграл төмөнкүдөй символ менен белгиленет

$$\int f(x)dx; \tag{3}$$

мында $f(x)$ – интеграл астындагы функция, $f(x)dx$ – интеграл астындагы туюнтма, ал эми $\int$– интеграл белгиси деп аталат.

Ошентип,

$$\int f(x)dx = F(x) + \mathrm{C}. \tag{4}$$

Кээ бир функциялардын аныкталбаган интегралдарын издөө интегралдоо деп аталат. Интегралдоо дифференцирлөөгө тескери операцияны берет, ошондуктан дифференцирлөөнүн ар бир (1) формуласына интегралдоонун (4) формуласы туура келет.

2. Негизги интегралдардын таблицасы

$$\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad (1)$$

($\alpha = const, \alpha \neq -1$), (каалагандай интервалда, мында $\cos u \neq 0$)

$$\int \frac{du}{u} = \ln u + C \qquad (2)$$

($\forall$ интервалда,мында $u \neq 0$).

$$\int e^{u} du = e^{u} + C \qquad (3)$$

$$\int a^{\alpha} du = \frac{a^{u}}{\ln a} + C \qquad (4)$$

($\alpha = const, a > 0, a \neq 1$),

$$\int \cos u du = \sin u + C \qquad (5)$$

$$\int \sin u \, du = -\cos u + C \qquad (6)$$

$$\int \frac{du}{cos^{2}u} = tg u + C \qquad (7)$$

(каалагандай интервалда, мында $\cos u \neq 0$)

$$\int \frac{du}{sin^{2}u} = -ctg u + C \qquad (8)$$

($\forall$интервалда, мында $\sin u \neq 0$).

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^{2}-u^{2}}} = arc \sin \frac{u}{a} + C \, , (-|a| < u < |a|) \qquad (9)$$

$$\int \frac{du}{a^{2}+u^{2}} = \frac{1}{2} arctg \frac{u}{a} + C, \qquad (10)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^{2}+a}} = \ln\left|u + \sqrt{u^{2} + a}\right| + C. \qquad (11)$$

Бул таблицанын бардык формулаларында u деп эркин дифференцирленүүчү $u = \varphi(x)$ функцияны алууга болот.

Аныкталбаган интегралдын касиеттери.

1. Турактуу көбөйтүүчүнү интеграл белгисинин алдына чыгарууга болот, б.а.

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx, \text{мында } a = const. \qquad (5)$$

2. Алгебралык сумманын интегралы, алардын интегралдарынын алгебралык суммасына барабар б.а.

$$\int[f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx. \qquad (6)$$

Интеграл астындагы функцияларды теңдеш өзгөртүү жана негизги интегралдардын таблицасы менен ушул эки касиеттин жардамы менен интегралдоону түздөн-түз интегралдоо деп атайбыз.

Бул баптын бардык маселелеринде аныкталбаган интегралды эсептөө талап кылынат.

1. $\int(x^5 - 3x^4 - 7x + 5)dx$.

Чыгаруу. Алгебралык сумманын интегралын интегралдардын кошулуучусу катары карап, турактуу көбөйтүүчүлөрдү интегралдардын белгилеринин астына чыгарып жана негизги интегралдардын таблицасынын (1) формуласын колдонуп, төмөнкүнү алабыз

$$\int(x^5 - 3x^4 - 7x + 5)dx$$

$$= \int x^5dx - 3\int x^4dx - 7\int xdx + 5\int dx =$$

$$= \frac{1}{6}x^6 - \frac{3}{5}x^5 - \frac{7}{2}x^2 + 5x + C.$$

Мында ар бир интегралдан алынган эркин турактуулар бир эркин турактуута бириккенин байкайбыз.

2. $\int \frac{2+3\sqrt[3]{x^2}+5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}dx.$

Чыгаруу. Мүчөлөп бөлүүнү жүргүзүп жана (1) жана (2) формулаларын колдонуп, төмөнкүнү алабыз

$$\int \frac{2+3\sqrt[3]{x^2}+5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}dx = 2\int x^{-\frac{3}{2}}dx + 3\int x^{-\frac{5}{6}}dx + 5\int \frac{dx}{x} =$$

$$= 2\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + 3\frac{x^{-\frac{5}{6}+1}}{-\frac{5}{6}+1} + 5\,ln|x| + C = -\frac{4}{\sqrt{x}} + 18\sqrt[6]{x}$$

$$+ 5\,ln|x| + C.$$

3. $\int \frac{dx}{x^4+x^2}.$

Чыгаруу. Алымына интеграл алдындагы x^2 функциясын кошуп жана кемитип, төмөнкүнү алабыз

$$\int \frac{dx}{x^4+x^2} = \int \frac{x^2+1-x^2}{x^2(x^2+1)}dx = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \int x^{-2}\,dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{1}{x} - arctg\,x + C.$$

4. $\int \frac{1}{sin^2 x cos^2 x}dx.$

Чыгаруу. Интегралды табуу үчүн интеграл астындагы функциянын алымдагы 1 ди $sin^2 x + cos^2 x$ туюнтмасы менен алмаштырып жана негизги интегралдардын таблицасындагы (7) жана (8) формулаларын колдонобуз:

$$\int \frac{1}{sin^2xcos^2x}dx = \int \frac{sin^2x+cos^2x}{sin^2xcos^2x}dx = \int \frac{dx}{cos^2x}$$
$$+\int \frac{dx}{sin^2x} = tgx - ctgx + C.$$

5. $\int \sqrt[7]{x^5}dx.$

6. $\int(2x^8 - 5x^5 - 1)dx.$

7. $\int \frac{dx}{x^2}.$

8. $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx.$

9. $\int \frac{x^2+5x+6}{x+3}dx.$

10. $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) dx.$

11. $\int \frac{2-x+x^2}{3x}dx.$

12. $\int \frac{x^2+2}{1+x^2}dx.$

Көрсөтмө. Алымын $1 + x^2 + 1$

түрүндө көрсөткүлө

13. $\int \frac{2+3x^2}{x^2(1+x^2)}dx.$

14. $\int \sqrt{x}dx.$

15. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}dx.$

16. $\int(x-1)^2x\sqrt[4]{x}dx.$

17. $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}dx.$

23. $\int \frac{dx}{x^2+7}dx.$

24. $\int \frac{3-\sqrt{5+x^2}}{5+x^2}dx.$

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-x^2}}.$

26. $\int \frac{2+\sqrt{3x^2-x^5}}{\sqrt{3-x^2}}dx.$

27. $\int \left(2e^x + \frac{1}{1+x^2}\right) dx.$

28. $\int(2\sin x - 3\cos x)dx.$

29. $\int \left(\frac{1}{cos^2x} + \frac{1}{sin^2x}\right) dx.$

30. $\int \frac{\sin 2x}{\cos x}dx.$

31. $\int \frac{dx}{\cos 2x + sin^2x}.$

32. $\int \frac{2xsin^2x+1}{sin^2x}dx.$

33. $\int \frac{cos^2x - \sin x cos^2x + 1}{cos^2x}dx.$

34. $\int \frac{1+cos^2x}{1+\cos 2x}dx.$

35. $\int \frac{x\sin 2x + \sqrt[3]{x}\cos x}{x\cos x}dx.$

36. $\int \frac{xe^x - x}{x}dx.$

18. $\int \frac{\sqrt{x^3}+1}{\sqrt{x}+1} dx.$

19. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx.$

20. $\int \left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)^3 dx.$

21. $\int 2^x dx.$

22. $\int a^x e^x dx.$

37. $\int cos^2 \frac{x}{2} dx.$

Көрсөтмө. Интеграл астындагы функцияны аркылуу $\cos x$ туюнтабыз.

38. $\int tg^2 x dx.$

Көрсөтмө. Интеграл астындагы функцияны $\frac{1}{cos^2 x}$ *аркылуу туюнтабыз.*

§ 1.2 ОРДУНА КОЮУЛАР (ПОДСТАНОВКА) МЕНЕН ИНТЕГРАЛДОО

1. Дифференциал белгисинин астына киргизүү. Функциянын дифференциалынын аныктамасы боюнча,

$$\varphi'(x)dx = d\varphi(x).$$

Бул барабардыкта солдон оңго өтүүнү "$\varphi'(x)$ көбөйтүүчүсүн дифференциал белгисинин алдына киргизебиз".

Төмөнкү түрдөгү интегралды табуу талап кылынсын

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx. \qquad (1)$$

Бул интегралдагы $\varphi'(x)$ көбөйтүүчүнү дифференциал белгисинин астына киргизебиз, андан кийин $\varphi(x) = u$ ордуна коюуну (подстановканы) жүргүзөбүз, анда аныкталбаган интегралдагы ордуна коюу (подстановка) формуласын алабыз:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = \int f(u)du. \qquad (2)$$

(2) формуласындагы сол жана оң бөлүктөрүнүн ордун алмаштырып, u тамгасын x тамгасына, ал эми x тамганы t га алмаштырып, төмөнкүнү алабыз

$$\int f(x)dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt, \qquad (3)$$

мында $x = \varphi(t)$ – дифференцирленүүчү функция.

(3) формуласынын колдонулушу кийинки параграфтарда каралат.

(2) формуласы боюнча интегралдоого мисалдарды карайбыз.

39. $\int \frac{ln^2x}{x}dx.$

Чыгаруу. $u = \ln x$ деп белгилеп, (1) формуласы боюнча

$$\int \frac{ln^2x}{x}dx = \int ln^2xd\,ln\,x = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{ln^3x}{3} + C.$$

40. $\int \frac{\sqrt[3]{arctgx}}{1+x^2}dx.$

Чыгаруу. $\int \frac{\sqrt[3]{arctgx}}{1+x^2}dx = \int \sqrt[3]{arctgx}\,d(arctgx) = \int \sqrt[3]{u}\,du = \int u^{\frac{1}{3}}du = \frac{3}{4}(arctgx)^{\frac{4}{3}} + C.$

Мында $arctgx = u$ экендиги анык. Көбүнчө кээ бир көндүмдөрдө функцияны u аркылуу алмаштыруу ооз эки жүргүзүлөт

41. $\int \frac{\cos\ln x}{x}dx.$

Чыгаруу. $\int \frac{\cos\ln x}{x}dx. = \int \cos\ln x\,d(\ln x) = \sin\ln x + C.$

Мында u катары $\ln x$ алынган жана (5) формуласы колдонулган.

42. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{sin^2 x+3}} dx.$

43. $\int \frac{sin^3 x}{cos^5 x} dx.$

Көрсөтмө.$tg^3 x$

көбөйтүүчүнү бөлүп алгыла

44. $\int \frac{(2x-1)}{\sqrt{1-x+x^2}} dx.$

45. $\int \frac{e^{\text{tg}x} dx}{cos^2 x}.$

46. $\int \frac{\sin 2x}{1+sin^2 x} dx.$

47. $\int \frac{e^{arc\sin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

48. $\int \frac{3x^2}{x^3+1} \ln(x^3+1)\, dx.$

49. $\int \frac{2x}{1+x^4} dx.$

50. $\int \frac{x^3+5}{x+2} dx.$

Көрсөтмө. Бөлөктүн алымын $(x^3+8)-3$ түрүндө көрсөткүлө.

51. $\int \frac{(\ln x)^2+1}{x} dx.$

52. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}.$

Көрсөтмө. Бөлүмдү $tgxcos^2 x$ алабыз.

53. $\int tg^3 x dx.$

Көрсөтмө. $tg^3 x$ ти $tgx \cdot tg^2 x$ деп жазып, $tg^2 x$ ти $\frac{1}{cos^2 x}$ аркылуу жазгыла.

54. $\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}} dx.$

55. $\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{\cos x}}.$

2. Турактуу көбөйтүүчүнү чыгаруу. Интегралдоодо көбүнчө төмөнкү формуланы колдонушат

$$\int f(x)dx = \frac{1}{a}\int af(x)dx, \quad (4)$$

ал түгүл $d\varphi(x) = d[\varphi(x)+C]$ $(C = const)$.

Бул формула боюнча интегралданууучу мисалдарды карайбыз.

56. $\int xe^{-x^2} dx.$

Чыгаруу.

$$\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}(-2x)\,dx = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}d(-x^2)$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$$

57. $\int \mathrm{tg}x\,dx.$

Чыгаруу.

$$\int tgx\,dx = \int \frac{sin\,x}{cos\,x}dx = -\int \frac{d(cos\,x)}{cos\,x} = -\,ln|cos\,x| + C.$$

58. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx.$

Чыгаруу.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{\sqrt{1-(x^3)^2}} = \frac{1}{3}arc\,sin(x^3) + C.$$

59. $\int \frac{x}{5+7x^4}dx.$

Чыгаруу.

$$\int \frac{xdx}{5+7x^4} = \frac{1}{14}\int \frac{d(x^2)}{\left(\sqrt{\frac{5}{7}}\right)^2 + (x^2)^2} = \frac{1}{14}\sqrt{\frac{7}{5}}\;arctg\sqrt{\frac{7}{5}}x^2 + C.$$

60. $\int \frac{dx}{e^x+1}.$

Чыгаруу.

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{e^x+1}{e^x+1}dx - \int \frac{e^x}{e^x+1}dx = \int dx - \int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} =$$

$$= x - ln(e^x+1) + C.$$

61. $\int (x^2+1)^3 2xdx.$

62. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{3+\sin x}}.$

63. $\int \sin 3x\, dx.$

64. $\int e^{x^3} x^2 dx.$

65. $\int \frac{\sin x dx}{cos^2 x}.$

66. $\int \cos\frac{x}{3} dx.$

67. $\int e^{x^2+4x+3}(x+2)dx.$

68. $\int \frac{dx}{2+3x^2}.$

69. $\int 2^{x^2} xdx.$

70. $\int e^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$

71. $\int \frac{3^x}{1+3^{2x}} dx.$

72. $\int \frac{\sin\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}}.$

73. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6-2}}.$

74. $\int e^{-\frac{x}{2}} dx.$

75. $\int x^3\sqrt{2x^4-3}dx.$

76. $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{7-x^6}}.$

77. $\int \frac{dx}{x-5}.$

78. $\int \sqrt{x-1}dx.$

79. $\int \sqrt{4-3x}dx.$

80. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}.$

81. $\int \cos(x^2+5)\, xdx.$

82. $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx.$

83. $\int \frac{\ln x - 3}{x\sqrt{\ln x}} dx.$

84. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(3x^3-2)^2}}.$

85. $\int \frac{e^x\sqrt{arctg e^x}}{1+e^{2x}} dx.$

86. $\int \frac{dx}{tgx ln^2 \sin x}.$

§ 1.3. БӨЛҮКТӨП ИНТЕГРАЛДОО

1. Бөлүктөп интегралдоо методу. Бөлүктөп интегралдоонун формуласы деп төмөнкү барабардык аталат

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Бул формуланы колдонуунун максаты сол жаккы интегралды табууну оң жаккы интегралды табууга алмаштырса болот, акыркысы жөнөкөй болуп эсептелет. Бөлүктөп интегралдоо менен эсептелүүнүчү интегралга төмөнкү түрдөгү интеграл да кирет

$$\int P(x)f(x)dx,$$

мында $P(x)$ – көп мүчө (көбүнчө даражалуу функция x^n), $f(x)$ – кийинки фунциялардын бирөөсү: $e^{\alpha x}, \sin \alpha x, \cos \alpha x, \ln x, arctgx, arc\sin x$.

87. $\int x^2\, ln\, x\, dx$.

Чыгаруу. $u = ln\, x\, , dv = x^2dx, анда$

$$du = \frac{dx}{x}, v = \frac{x^3}{3}$$

$$\int x^2 \ln x\, dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

v ны дифференциалынан табууда $v = \frac{x^3}{3} + C$ деп жазбастан, $v = \frac{x^3}{3}$ деп жазабыз, анткени бөлүктөп интегралдоонун формуласын колдонууда бардык баштапкылардын жыйындысын эмес, бир эле баштапкыны табуу жетиштүү б.а.анык эмес интеграл.

88. $\int xe^xdx$.

Чыгаруу. $u = x\, , dv = e^xdx, анда$

$$du = dx, v = e^x,$$

ошондуктан

$$\int xe^xdx = x\,e^x - \int e^xdx = x\,e^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

Каралган мисалдар көрсөткөндөй бөлүктөп интегралдоодо u жана dv ны каалагандай тандоого болбойт. Эгерде акыркы мисалда $u = e^x,\ dv = xdx$ деп койсок, анда

$$du = e^x dx, v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x - \frac{1}{2}\int x^2 e^x dx.$$

Алынган интегралда интеграл астындагы функцияда x тин даражасы өстү. Бөлүктөп интегралдоону мындай колдонууда татаал интеграл пайда болуп, максатка жеткен жокбуз.

89. $\int \ln x\, dx.$

90. $\int xe^{2x} dx.$

91. $\int\ arctg\, x\, dx.$

92. $\int x \cos x\, dx.$

93. $\int x\ arctg\, x\, dx.$

94. $\int \frac{x}{sin^2 x} dx.$

95. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx.$

96. $\int \sqrt{x} \ln x\, dx.$

97. $\int x^n \ln x\, dx.$

98. $\int \frac{x \cos x}{sin^3 x} dx.$

99. $\int\ arc \sin x\, dx.$

2. **Бөлүктөп интегралдоону кайталап колдонуу.** Кээ бир учурларда бөлүктөп интегралдоонун формуласын удаалаш бир нече жолу аткарганга туура келет. Төмөнкү мисалда эки жолу бөлүктөп интегралдоо колдонулат.

100. $\int x^2\, cos\, x\, dx.$

Чыгаруу.

$$\int x^2 \cos x\, dx = \begin{vmatrix} u = x^2, dv = \cos x\, dx \\ du = 2xdx, v = \sin x \end{vmatrix} = x^2 \sin x$$

$$-2\int x \sin x dx \begin{vmatrix} u = x, dv = \sin x dx \\ du = dx, v = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\int \cos x\, dx = x^2 \sin x$$

$$+ 2x \cos x - 2 \sin x + C.$$

101. $\int x^2 e^{-x} dx.$

103. $\int x ln^2 x dx.$

102. $\int x^2 \sin x\, dx.$

3. Берилген интегралга кайтып келүү. Кээде бөлүктөп интегралдоонун формуласын кайталап колдонуу изделүүчү интегралдын теңдемесине алып келинет.

104. $\int e^x \cos x\, dx.$

Чыгаруу. Изделүүчү интегралды I менен белгилеп,
$u = \cos x, dv = e^x\, dx$ деп

$I = \int e^x \cos x dx = e^x \cos x +$

$\int e^x \sin x dx \begin{vmatrix} u = \sin x, du = \cos x\, dx \\ dv = e^x dx, v = e^x \end{vmatrix} =$

$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x(\cos x + \sin x) - I.$$

Iни барабардыктын сол жагына алып өтүп жана 2 ге бөлүп, табабыз

$$I = \frac{1}{2} e^x(\cos x + \sin x) + C.$$

105. $\int \sqrt{1 + x^2} dx.$

109. $\int e^{2x} sin^2 x dx.$

106. $\int e^x \sin x dx$.

107. $\int \sqrt{1-x^2} dx$.

108. $\int \cos(\ln x)\, dx$.

Көрсөтмө. sin^2x ти $\frac{1-\cos 2x}{2}$.

110. $\int e^{arc\sin x}\ dx$.

4. Рекуренттик формулалар. Кээде бөлүктөп интегралдоо айрым функциялардын даражасын кармаган жана ошого окшош эле ошол функциянын кичине даража көрсөткүчү менен анык эмес интегралдын арасындагы катышты алууга мүмкүндүк берет. Мындай катыштар рекуренттик формулалар деп аталат. Маанилүү мисалды карайбыз.

111. $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ интегралы үчүн рекуренттик формуланы чыгаргыла жана анын жардамы менен $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$ интегралын эсептегиле.

Чыгаруу.

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^n} dx =$$

$$= \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^n} dx = I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^n} dx.$$

Акыркы интегралда $u = x, dv = \int \frac{x}{(x^2+1)^n} dx$, анда

$$du = dx, v = \int \frac{x}{(x^2+1)^n} dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^n} =$$

$$\frac{1}{2}\int t^{-n}\, dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-n+1}}{-n+1} + C = -\frac{1}{2n-2} \cdot \frac{1}{t^{n-1}} + C =$$

$$= -\frac{1}{2n-2} \cdot \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} + C,$$

ошондуктан

$$I_n = I_{n-1} + \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2n-2} \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + I_{n-1} - \frac{1}{2n-2} I_{n-1} =$$

$$= \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}.$$

Ошентип, рекуренттик формулага келдик

$$I_n = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1},$$

кайталап колдонгондо аягында “таблицалык” интегралга алып келет

$$\int \frac{dx}{x^2+1}.$$

$n = 2$ болгондо рекуренттик формуланы колдонуп, төмөнкүнү алабыз

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} arctgx + C,$$

$n = 3$ болгондо ошол эле формуланы колдонуп, төмөнкүнү табабыз

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)} + \frac{3}{4} I_2$$

$$= \frac{x}{4(x^2+1)} + \frac{3x}{8(x^2+1)} \frac{3}{8} arctgx + C.$$

112. Интеграл үчүн рекуренттик формуланы чыгаргыла

$$I_n = \int x^k ln^n x dx \qquad (n > 0, \text{бүтүн}).$$

Көрсөтмө. $u = ln^n x$ деп белгилегиле.

113. Интеграл үчүн рекуренттик формуланы чыгаргыла

$$I_n = \int sin^n x dx \qquad (n > 0, \text{бүтүн})$$

жана анын жардамы менен $\int sin^4 x dx$ ти эсептегиле.

Көрсөтмө. $sin^n x = sin^{n-2} x (1 - cos^2 x)$ жана $dv = sin^{n-2} x \cos x dx$ *ти* коёбуз.

§ 1.4. ЖӨНӨКӨЙ БӨЛЧӨКТӨРДҮ ИНТЕГРАЛДОО

1. Жөнөкөй бөлчөктөргө ажыратуу. Рационалдык бөлчөк деп $R(x)$ функциясы аталат, төмөндөгүдөй көрсөтүлөт

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

мында $P(x)$ жана $Q(x)$ —чыныгы коэффициенттери менен көп мүчөлөр.

Эгерде алымынын даражасы бөлүмүнүн даражасынан кичине болсо, $R(x)$ рационалдык бөлчөгү дурус деп аталат. Ар бир дурус рационалдык бөлчөк төмөнкүдөй төрт типтеги жөнөкөй бөлчөктөрдүн санынын чектүү суммасы түрүндө көрсөтүлүшү мүмкүн:

1. $\frac{A}{x-a}$, 2. $\frac{A}{(x-a)^n}$ $(n > 1 - \text{натуралдык сан})$,

3. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, 4. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$ ($n > 1 -$ натуралдык сан),

мында $\frac{p^2}{4} - q < 0$, б.а. бөлүмдүн тамырлары комплекстүү.

Ошентип, дурус рационалдык бөлчөктөрдү интегралдоо үчүн: 1) жөнөкөй бөлчөктөрдү интегралдоону, 2) рационалдык бөлчөктөрдү жөнөкөйлөргө ажыратууну билүү жетиштүү.

Бул параграфта ал маселелерди чыгарып көрсөтөбүз.

2. Биринчи эки түрдөгү жөнөкөй бөлчөктөрдү интегралдоо

114. $\int \frac{A}{x-a} dx$.

Чыгаруу.

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln|x-a| + C.$$

115. $\int \frac{A}{(x-a)^n} dx$ ($n > 1 -$ натуралдык сан).

Чыгаруу. $\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^n} = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C.$

116. $\int \frac{dx}{x-7}$.

117. $\int \frac{dx}{3-x}$.

118. $\int \frac{dx}{1+5x}$.

119. $\int \frac{dx}{(3x+2)^2}$.

120. $\int \frac{dx}{(4-5x)^3}$.

3. Үчүнчү типтеги жөнөкөй бөлчөктөрдү интегралдоо.

Төмөнкүдөй түрдөгү интеграл берилсин

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx \ \ (\frac{p^2}{4} - q < 0).$$

Интеграл астындагы функциянын бөлүмүнөн толук квадратты бөлүп алабыз

$$x^2 + px + q = x^2 + 2\frac{p}{2}x + q = x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} + q - \frac{p^2}{4} =$$

$$= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right),$$

андан кийин $x + \frac{p}{2} = t\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$ ордуна коюусу (подстановка) менен интегралды “таблицалык” интегралга оңой алынып келүүчү төмөнкүдөй түргө алып келебиз

$$\int \frac{At + B}{t^2 + 1}dt = A\int \frac{tdt}{t^2 + 1} + B\int \frac{dt}{t^2 + 1}$$

(A жана B − кээ бир сандар). Аны биз мисалда көрсөтөбүз.

121. $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}dx.$

Чыгаруу. Интеграл астындагы функциянын бөлүмүндөгү функция

$$\frac{p^2}{4} - q = \frac{(-1)^2}{4} - 1 < 0,$$

демек, үчүнчү типтеги жөнөкөй бөлчөк интегралданат. Андыктан

$$x^2 - x + 1 = x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4},$$

(“толук квадратты бөлүп алуу” ыкмасы үйрөнүүдө көндүм болуш керек), анда

$$\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}dx = \int \frac{3x-1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}d\,x.$$

Ордуна коёбуз (подстановка):

$$x-\frac{1}{2}=t\frac{\sqrt{3}}{2}, x=\frac{t\sqrt{3}+1}{2}, dx=\frac{\sqrt{3}}{2}dt,$$

анда

$$\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}dx = \int \frac{\left(3\frac{t\sqrt{3}+1}{2}-1\right)}{\frac{3}{4}(t^2+1)}d\,t =$$

$$= \int \frac{tdt}{t^2+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{3}{2}\ln(t^2+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\, t + C =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\frac{4}{3}(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C_1,$$

мында $C_1 = C + \frac{3}{2}\ln\frac{4}{3}$.

122. $\int \frac{xdx}{x^2+7x+13}$.

123. $\int \frac{4x+8}{3x^2+2x+5}\,dx.$

124. $\int \frac{x+5}{2x^2+2x+3}\,dx.$

125. $\int \frac{5x-7}{8x^2+x+1}\,dx.$

4. Төртүнчү типтеги жөнөкөй бөлчөктөрдү интегралдоо.

Бул типтеги интегралда

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx \qquad (\frac{p^2}{4}-q<0, n>1),$$

Бөлүмүндөгү толук квадратты бөлүп алабыз

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right).$$

$x+p=t\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$ ордуна коюусу (подстановкасы) менен интегралды төмөнкүдөй түргө алып келебиз

$$\int\frac{At+B}{(t^2+1)^n}dt=A\int\frac{tdt}{(t^2+1)^n}+B\int\frac{dt}{(t^2+1)^n}$$

Оң жактагы биринчи интеграл "таблицалык" интегралга оңой эле келтирилет, ал эми экинчи - **111** ди чыгаруудан алынган рекуренттик формуланын жардамы менен табылат. Буну биз төмөнкү мисалда көрсөтөбүз.

126. $\int\frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx.$

Чыгаруу. Интеграл астындагы функциянын бөлүмүндө

$$\frac{p^2}{4}-q=1-3<0,$$

демек, төртүнчү типтеги жөнөкөй бөлчөк интегралданат. $x^2+2x+3=(x+1)^2+2$ экендигин эске алып, подстановка кылабыз:

$$x+1=t\sqrt{2}, x=t\sqrt{2}-1, dx=\sqrt{2}\,dt,$$

анда

$$\int\frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx=\int\frac{t\sqrt{2}-2}{4(t^2+1)^2}\sqrt{2}\,dt=$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{tdt}{(t^2+1)^2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{d(t^2+1)}{(t^2+1)^2} -$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = -\frac{1}{t^2+1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}.$$

Рекуренттик формуланын күчүнө ылайык (111 ди кара) $n = 2$ болгондо төмөнкүгө ээ болобуз

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2} arctg\, t + C.$$

ошондуктан

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\, dx = -\frac{1}{4(t^2+1)} - \frac{\sqrt{2t}}{4(t^2+1)} - \frac{\sqrt{2}}{4} arctg\, t + C$$

$$= -\frac{\sqrt{2t}+1}{4(t^2+1)} - \frac{\sqrt{2}}{4} arctg\, t + C =$$

$$= -\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4} arctg\, \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

127. $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}\, dx.$ **128.** $\int \frac{3x+2}{(x^2-3x+3)^2}\, dx.$

§ 1.5. РАЦИОНАЛДЫК БӨЛЧӨКТӨРДҮ ИНТЕГРАЛДОО

1. Рационалдык бөлчөктөрдү интегралдоонун схемасы. Рационалдык бөлчөктөрдү интегралдоо үчүн

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

мында $P(x)$ жана $Q(x)$ –чыныгы коэффициенттери менен көп мүчөлөр, удаалаш үч кадамды аткарышат.

Биринчи кадам. Эгерде буруш бөлчөк болсо, б.а. $P(x)$ алымынын даражасы $Q(x)$ бөлүмүнүн даражасынан чоң же барабар, $P(x)$ алымын $Q(x)$ бөлүмүнө көп мүчөнү көп мүчөгө бөлүү эрежеси менен рационалдык бөлчөк $R(x)$тин бүтүн бөлүгүн бөлүп алабыз. Мындан кийин рационалдык бөлчөк сумма түрүндө, бөлүнүп алынган бүтүн бөлүктүн $M(x)$ көп мүчөсү жана дурус калдык бөлчөк $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ түрүндө жазылышы мүмкүн:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}.$$

Экинчи кадам. $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ дурус бөлчөктү жөнөкөй бөлчөктөргө ажыратышат. Ал үчүн $Q(x) = 0$ теңдемесинин тамырларын табышат жана $Q(x)$ бөлүмүн чыныгы коэффициенттүү биринчи жана экинчи даражадагы көп мүчөлөргө ажыратышат:

$$Q(x) = (x-a)^k(x-b)^l \dots (x^2+px+q)^m(x^2+rx+s)^n \dots \quad (1)$$

Бул ажыратуудагы $Q(x)$ бөлүмүнүн биринчи даражадагы көп мүчөлөрү чыныгы тамырларга, ал эми экинчи даражадагы көп мүчөлөрү- комплекстүү түйүндөш тамырлардын түгөйүнө дал келишет. x тин эң чоң даражадагы $Q(x)$ бөлүмүндө коэффициентти бирге барабар деп эсептесе болот, же ага $P(x)$ жана $Q(x)$ке бөлүү менен дайыма жетишсе болот. Эгерде бөлүмү $Q(x)$ (1) түрүндө көрсөтүлсө, тамырларын издөө ашыкча.

Мындан кийин дурус калдык бөлчөк төмөнкү формула менен жөнөкөйлөргө ажырайт

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\cdots+\frac{B_l}{(x-a)^l}+\cdots$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)^m}+\cdots, \qquad (2)$$

Мында $A_1, A_2, \dots, M_1N_1, \dots -$ аныкталбаган (белгисиз) коэффициенттер (алардын кээ бирлери нөлгө барабар болушу мүмкүн).

Аныкталбаган коэффициенттерди табуу үчүн бардык жөнөкөй бөлчөктөрдү $Q(x)$ жалпы бөлүмгө алып келишет жана эки бөлүгүнүн алымдарын (2) барабардыгына теңдешет.Андан кийин x тин бирдей даражадагы коэффициенттерин салыштырышат. Бул биз кызыккан коэффициенттердин маанисин табуу үчүн теңдемелер системасына келтирилет.

Үчүнчү кадам. Бүтүн бөлүгү бөлүнүп алынган жана бардык жөнөкөй бөлчөктөрдүн (буга чейинки параграфтардагы ыкмалар менен) интегралдарын табышат, андан кийин аларды чогултушат.

Кээ бир учурларды карайбыз.

1. *Бөлүмү биринчи даражадагы кайталанбаган көп мүчөлөргө гана ажырайт.*

129. $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}\,dx.$

Чыгаруу. Интеграл астындагы рационалдык бөлчөк дурус эмес, анткени алымынын даражасы бөлүмүнүн даражасына барабар, ошондуктан бүтүн бөлүгүн бөлүп алабыз:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} 5x^3 + 9x^2 - 22x - 8 \\ -5x^3 \qquad\quad - 20x \end{array} & \dfrac{x^3 - 4x}{5}. \\ \hline
9x^2 - 2x - 8 &
\end{array}
$$

Ошентип,

$$\int \frac{5x^3 + 9x^2 - 22x - 8}{x^3 - 4x}\,dx = \int \left(5 + \frac{9x^2 - 2x - 8}{x^3 - 4x}\right)dx.$$

Дурус калдык бөлчөктүн бөлүмү төмөнкүдөй түрдө көп мүчөлөргө ажырайт:

$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2).$$

(2) формуласы боюнча бөлүмүнүн $x - a$ түрүндөгү ар бир көбөйтүүчүсүнө дурус бөлчөктү жөнөкөйлөргө ажыратууда $\frac{A}{x-a}$ түрүндөгү кошулуучу туура келет, ошондуктан бул учурда төмөнкүдөй ажыроо алынат

$$\frac{9x^2 - 2x - 8}{x^3 - 4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 2}.$$

Оң жагын жалпы бөлүмгө келтирип жана алымдарын барабарлап, тендештикти алабыз

$$9x^2 - 2x - 8 = A(x - 2)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(x - 2).$$

x тин бирдей даражадагы коэффициенттери теңдештиктин эки бөлүгүндө барабар болуш керек, ошондуктан сол жагынан баштап x тин коэффициенттерин салыштырып, тендемелер системасын алабыз

$$\begin{array}{r|c} x^2 & 9 = A + B + C, \\ x^1 & -2 = 2B - 2C, \\ x^0 & -8 = -4A. \end{array}$$

Системанын үчүнчү теңдемесинен $A = 2$ экендигин табабыз. A нын маанисин биринчи тендемеге коюп жана экинчини 2 ге кыскартып,

$$B + C = 7, B - C = -1$$

ээ болобуз, мындан $B = 3, C = 4$ келип чыгат.

A, B, C белгисиздери табылган ыкма коэффициенттерди салыштыруу жолу деп аталат.

Көбүнчө коэффициенттерди аныктоодо жеке маанилердин ыкмасын колдонуу ыңгайлуу, анда алымдарын барабарлагандан кийин x аргументине кээ бир ыңгайлуу маанилерди беришет (алар тамырлардын маанилери болушат). Каралган учурда сызыктын сол жагына x аргументине берилген маанилер болсун деп, төмөнкүдөй алабыз:

$$\begin{array}{r|c} x = 0 & -8 = -4A, A = -2, \\ x = 2 & 24 = 8B, B = 3, \\ x = -2 & 32 = 8C. C = 4. \end{array}$$

Ошентип, коэффициенттердин ошол эле маанилери оңой алынды. Белгисиз коэффициентерди издөөдө эки ыкманы тең колдонсо болот.

Интеграл астындагы калдык бөлчөктү жөнөкөй бөлчөктөргө ажыратууга алмаштырып (ага табылган коэффициенттердин

маанилерин коюлганы менен) жана керектүү интегралдарды таап, удаалаш төмөнкүнү алабыз

$$\int \frac{5x^3 + 9x^2 - 22x - 8}{x^3 - 4x}\,dx = \int \left(5 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x-2} + \frac{4}{x+2}\right)dx =$$

$$= 5\int dx + 2\int \frac{dx}{x} + 3\int \frac{dx}{x-2} + 4\int \frac{dx}{x+2} =$$

$$= 5x + 2\ln|x| + 3\ln|x-2| + 4\ln|x+2| + C.$$

130. $\int \frac{x^3+x-1}{x^3+x^2-6x}\,dx.$ **131.** $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx.$

2. Бөлүмү арасындагы кайталануучулары бар биринчи даражадагы көбөйтүүчүлөргө гана ажырайт.

132. $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3}\,dx.$

Чыгаруу. Интеграл астындагы дурус бөлчөк. Анын бөлүмү (1) түрүндө көрсөтүлгөн. (2) формуласы боюнча, интеграл астындагы функцияны ажыратууда бөлүмүндөгү x көбөйтүүчүгө $\frac{A}{x}$ жөнөкөй бөлчөгү туура келет, ал эми $(x+1)^3$ көбөйтүүчүсүнө үч жөнөкөй бөлчөктөрдүн суммасы туура келет:

$$\frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3};$$

Ошондуктан интеграл астындагы функцияны жөнөкөй функцияларга ажыратуу төмөнкүдөй түргө ээ

$$\frac{3x+2}{x(x+1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3}.$$

Оң жагын жалпы бөлүмгө келтирип жана алымдарын барабарлап, төмөнкүнү алабыз

$$3x+2=A(x+1)^3+Bx(x+1)^2+Cx(x+1)+Dx.$$

Жеке маанилердин жана коэффициенттерди салыштыруунун ыкмаларын бириктирип, табабыз:

$x=0$	$2=A,$
$x=-1$	$-1=-D, D=1,$
x^3	$0=A+B=2+B, B=-2,$
x^2	$0=3A+2B+C=2+C, C=-2;$

$$\int\frac{3x+2}{x(x+1)^3}\,dx=2\int\frac{dx}{x}-2\int\frac{dx}{x+1}-2\int\frac{D}{(x+1)^2}+\int\frac{dx}{(x+1)^3}$$

$$=2\ln|x|-2\ln|x+1|+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{2(x+1)^2}+C=$$

$$=\frac{4x+3}{2(x+1)^2}+2\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C.$$

133. $\int\frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}\,dx.$

134. $\int\frac{3x^3+5x^2-25x-1}{(x+2)(x-1)^2}\,dx.$

135. $\int\frac{dx}{x^3(x-1)^2}$.

136. $\int\frac{dx}{x(x+1)^2}$.

3. Бөлүмү экинчи даражадагы кайталанбаган гана жана биринчи даражадагы көбөйтүүчүлөгө да ажыроосу мүмкүн.

137. $\int\frac{x^3-2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx.$

Чыгаруу. Интеграл астындагы дурус бөлчөк. Анын бөлүмү буга чейин (1) түрүндө көрсөтүлгөн.

(2) формуласына ылайык, интеграл астындагы функциянын бөлүмүнүн x^2+1 көбөйтүүчүсүнө $\frac{Mx+N}{x^2+1}$ жөнөкөй бөлчөгү туура келет. Интеграл астындагы функцияны жөнөкөй бөлчөктөргө ажыратуу төмөнкүдөй түрдө жазылат

$$\frac{x^3-2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Mx+N}{x^2+1}.$$

Оң жагын жалпы бөлүмгө келтирип жана алымдарын барабарлап,

$$x^3-2x+2=A(x-1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Mx+N)(x-1)^2$$

алабыз.

Жекече маанилердин жана коэффициенттерди салыштыруунун ыкмаларын бириктирип, төмөнкүнү табабыз:

$$\begin{array}{c|c} x=1 & 1=2B, B=\frac{1}{2}, \\ x=i & i^3-2i+2=(Mi+N)(i-1)^2=(Mi+N)(-2i),\ \text{же}\ i^3=-i, \\ x^3 & 2-3i=2M-2Mi\text{, комп. сандын анык. боюнча} \\ & \begin{cases} 2=2M, M=1, \\ -3=-2N, N=\frac{3}{2}, \end{cases} \end{array}$$

$$1=A+M=A+1, A=0:$$

ошондуктан

$$\int\frac{x^3-2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\int\frac{x+\frac{3}{2}}{x^2+1}dx=$$

$$= \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{3}{2} arctg + \text{C}.$$

138. $\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1} dx.$

Чыгаруу. Интеграл астындагы дурус бөлчөк. Анын бөлүмү кубдардын суммасынын формуласы боюнча (1) түрүнө келтирилет. (2) формуласы боюнча интеграл астындагы функцияны төмөнкүдөй жөнөкөй бөлчөктөргө ажыроосун алабыз:

$$\frac{2x^2-3x+1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2-x+1},$$

мындан

$$2x^2 - 3x + 1 = A(x^2 - x + 1) + (Mx + N)(x + 1).$$

Жекече маанилердин жана коэффициенттерди салыштыруунун ыкмаларын бириктирип, төмөнкүнү табабыз:

$$\left.\begin{array}{r} x=-1 \\ x^2 \\ x^0 \end{array}\right| \begin{array}{c} 6 = 3A, A = 2, \\ 2 = A + M = 2 + M, M = 0, \\ 1 = A + N = 2 + N, N = -1; \end{array}$$

ошондуктан

$$\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1} dx = 2\int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{x^2-x+1} =$$

$$= 2\ln|x+1| - \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

Акыркы интегралдагы ордуна коюу (подстановка)

$$x+\frac{1}{2}=t\frac{\sqrt{3}}{2}, dx=\frac{\sqrt{3}}{2}dt$$

$$\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\int\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}dt}{\frac{3}{4}(t^2+1)}=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}acrtg\, t+C=\frac{2}{\sqrt{3}}acrtg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Аягында, төмөнкүгө ээ болобуз

$$\int\frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx=2\ln|x+1|-\frac{2}{\sqrt{3}}acrtg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

139. $\int\frac{dx}{(x^2+2)(x-1)^2}$.

140. $\int\frac{x^3+3x^2-3x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$.

141. $\int\frac{3x^3-x^2-4x+13}{x^2(x^2-4x+13)}dx$.

4. Бөлүмдүн көбөйтүүчүлөрүнүн арасында экинчи даражадагы кайталануучу көбөйтүүчүлөр бар.

142. $\int\frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)^2}dx$.

Чыгаруу. Интеграл астындагы дурус бөлчөк. Анын бөлүмү буга чейин (1) түрүндө көрсөтүлгөн. (2) формуласына ылайык, бөлүмдүн $(x^2+1)^2$ көбөйтүүчүсүнө жөнөкөй бөлчөктөрдүн суммасы дал келет

$$\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Интеграл астындагы функцияны жөнөкөй бөлчөктөргө ажыратуу төмөнкүдөй түргө ээ

$$\frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Оң жагын жалпы бөлүмгө алып келип жана алымдарын барабарлап, алабыз

$$x^3+3=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x+1)(x^2+1)$$
$$+(Dx+E)(x+1).$$

Жекече маанилердин жана коэффициенттерди салыштыруунун ыкмаларын бириктирип, төмөнкүнү табабыз:

Ошентип,

$$\int\frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)^2}dx=\int\frac{\frac{1}{2}dx}{x+1}+\int\frac{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}{x^2+1}dx+\int\frac{-2x+1}{(x^2+1)^2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{x^2+1}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}$$
$$-\int\frac{2xdx}{(x^2+1)^2}+\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}+\frac{2}{\sqrt{3}}acrtg\,x-\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$
$$+\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln|x^2+1|+\frac{3}{2}acrtg\,x+\frac{1}{x^2+1}+\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Калган интеграл рекуренттик формуланын жардамы менен табылат ($n = 2$ болгондо ... кара)

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\, acrtg\, x + C,$$

аны туюнтмага коюп жөнөкөйлөткөндөн кийин, төмөнкүнү алабыз

$$\int \frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)^2}dx =$$

$$= \frac{x+2}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + 2\, acrtg\, x + C.$$

143. $\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}dx.$ **144.** $\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}dx.$

2. Рационалдык бөлчөктөрдү жөнөкөй бөлчөктөргө ажыратпастан интегралдоо.

Бул параграфтагы рационалдык бөлчөктөрдү интегралдоонун кемчилиги болуп $Q(x) = 0$ теңдемесинин тамырларын табуу зарылчылыгында. Андан сырткары, рационалдык бөлчөктөрдү интегралдоодо көрсөтүлгөн жалпы ыкманы түздөн-түз жөнөкой жол көрүнүп турса колдонууга болбойт. Мисалы төмөнкү интегралды табууда

$$\int \frac{x^3}{x^4-1}dx$$

$x^4 - 1 = t$ (подстановка) ордуна коюуну колдонууга туура келет, андыктан

$$x^3dx = \frac{1}{4}d(x^4-1).$$

Ушундай эле интегралды табыш үчүн

$$\int \frac{xdx}{x^4 + x^2 + 1}$$

Интеграл астындагы функцияны жөнөкөйлөргө ажыратпастан $x^2 = t$ ордуна коюуну (подстановка) колдонуууга туура келет.

145. $\int \frac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2} dx.$

146. $\int \frac{x^2}{(x^3+2)^2} dx.$

147. $\int \frac{dx}{x^4(x^2+1)}.$

Көрсөтмө, Интеграл астындагы функциянын алымын $(x^2 + 1) - x^2$ түрүндө көрсөтүп жана интегралды эки интегралдын суммасына бөлүп, ошол эле ыкманы кайтала.

§ 1.6 ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ФУНКЦИЯЛАРДАН РАЦИОНАЛДУУ КӨЗ КАРАНДЫ ФУНКЦИЯЛАРДЫ ИНТЕГРАЛДОО.

1. **Универсалдуу ордуна коюу (подстановка)**. u жана v эки өзгөрүлмөлүү $R(u, v)$ рационалдуу функция деп, ушул өзгөрүлмөлөргө салыштырмалуу эки көп мүчөнүн бөлүүсүн көрсөткөн функция деп аталат. Мисалы, функция

$$R(u, v) = \frac{5u^2v - 3uv + 7v - \sqrt{3}}{4u^2 - \sqrt{2}v + 5}$$

u жана v өзгөрүлмөлүү рационалдык функция болот.

Бул параграфта синустун жана косинустун рационалдык функцияларын интегралдоонун ыкмалары каралат б.а.төмөнкүдөй түрдөгү интеграл

$$\int R(\sin x, \cos x)dx.$$

Ордуна коюу (подстановка)

$$tg\,\frac{x}{2} = t,$$

универсалдуу деп аталат, каралып жаткан интегралды рационалдайт б.а. аны жаңы t аргументүү рационалдык бөлчөктөгү интегралга алып келет; мындай ордуна коюуда (подстановкада)

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Бирок кээде универсалдуу ордуна коюу (подстановка) рационалдуу бөлчөктүн интегралына алып келээрин эске алуу керек, бөлчөктүн тамырларын табууга такыр мүмкүн эмес болот. Мындай учур эгерде башка жетишерлик айкын ордуна коюу (подстановка) интегралды тез табууга алып келсе да болуп калышы мүмкүн (кара 149).

148. $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Чыгаруу. Интеграл астындагы $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\sin x}}$ функция $\sin x$ тен рационалдуу көз каранды. Универсалдуу ордуна коюуну (подстановка) колдонобуз:

$$tg\,\frac{x}{2} = t,$$

анда

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\, dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right| + C.$$

149. $\int \frac{dx}{\cos x}$.

Чыгаруу.

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \int \frac{d\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + C.$$

150. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$.

Чыгаруу. $tg\,\frac{x}{2} = t$ универсалдуу ордуна коюуну (подстановка) колдонуп, төмөнкүнү алабыз

$$\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x} = \int \frac{1}{8-4\frac{2t}{1+t^2}+7\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{2dt}{t^2-8t+15} = \int \frac{2dt}{(t-3)(t-5)} = \int \frac{(t-3)-(t-5)}{(t-3)(t-5)}dt = \int \frac{dt}{t-5} - \int \frac{dt}{t-3} =$$

$$= \ln|t-5| - \ln|t-3| + C = \ln\left|\frac{t-5}{t-3}\right| + C = \ln\left|\frac{tg\,\frac{x}{2}-5}{tg\,\frac{x}{2}-3}\right| + C.$$

151. $\int \frac{\sin x+\cos x}{3+\sin 2x}dx.$

Чыгаруу. $tg\,\frac{x}{2}=t$ универсалдуу ордуна коюуну (подстановка) колдонуп, төмөнкүнү алабыз

$$\int \frac{\sin x+\cos x}{3+\sin 2x}dx = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}{3+2\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2(-t^2+2t+1)}{3t^4-4t^3+6t^2+4t+3}dt,$$

мында бөлүмүнүн тамырларын табуу кыйын, ошондуктан алгач бөлүмүн өзгөртүп түзөбүз:

$$\int \frac{\sin x+\cos x}{3+\sin 2x}dx = \int \frac{\sin x+\cos x}{4-(sin^2x-2\sin x\cdot\cos x+cos^2x)}dx =$$

$$= \int \frac{\sin x+\cos x}{4-(\sin x-\cos x)^2}dx.$$

Эми $\sin x - \cos x = t$ ордуна коюусу (подстановка) $(\sin x + \cos x)dx = dt$ берет

$$\int \frac{\sin x+\cos x}{3+\sin 2x}dx = \int \frac{dt}{4-t^2} = \int \frac{dt}{(2-t)(2+t)}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{(2-t)+(2+t)}{(2-t)(2+t)}dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{2+t} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{2-t} = \frac{1}{4}\ln|2+t| - \frac{1}{4}\ln|2-t| + C =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x-\cos x+2}{\sin x-\cos x-2}\right| + C.$$

152. $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$.

153. $\int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x}$.

154. $\int \frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$.

155. $\int \frac{\sin x\cdot\cos x}{(3+\cos x)^2}dx$.

156. $\int \frac{\sin x}{1+tg\,x}dx$. **Көрсөтмө.** Тангенсти синус жана косинус аркылуу туюнтуп, алымын $\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2-1$ деп көрсөтүү керек.

2. Жеке ордуна коюулар (подстановкалар). $tg\,\frac{x}{2}=t$ универсалдуу ордуна коюусу (подстановкасы) кээ бир учурларда татаал эсептөөлөргө алып келет.Төмөнкү көрсөтүлгөн учурларда интегралды рационалдоочу жеке ордуна коюулары (подстановкалар) артыкчылыкка ээ:

1) эгерде $R(\sin x,\cos x)$ функциясы синуска салыштырмалуу так б.а. $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, анда төмөнкү ордуна коюу (подстановка) колдонулат

$$\cos x=t;$$

2) эгерде $R(\sin x,\cos x)$ функциясы косинуска салыштырмалуу так б.а. $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, анда төмөнкү ордуна коюу (подстановка) колдонулат

$$\sin x=t;$$

3) эгерде $R(\sin x,\cos x)$ функциясы синуска жана косинуска салыштырмалуу жуп б.а. $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, анда төмөнкү ордуна коюу (подстановка) колдонулат

$$tg\,x = t.$$

157. $\int \frac{sin^3 x}{\cos x - 3} dx.$

Чыгаруу. Мында интеграл астындагы функция синуска салыштырмалуу так:

$$\frac{(-\sin x)^3}{\cos x - 3} = -\frac{sin^3 x}{\cos x - 3}.$$

$\cos x = t$ деп алып, төмөнкүнү табабыз:

$$\sin x = \sqrt{1 - t^2}, x = arc\cos t, dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

ошондуктан

$$\int \frac{sin^3 x}{\cos x - 3} dx = -\int \frac{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3}{t - 3} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{t^2 - 1}{t - 3} dt =$$

$$= \int \frac{t^2 - 9 + 8}{t - 3} dt = \int (t + 3) dt + 8 \int \frac{dt}{t - 3} =$$

$$= \frac{t^2}{2} + 3t + 8\ln|t - 3| + C =$$

$$= \frac{cos^2 x}{2} + 3\cos x + 8\ln|\cos x - 3| + C.$$

$\sin x$ жана dx ти t аркылуу белгилебей деле, төмөнкүдөй өзгөртүп түзүүлөрдү жүргүзүп чыгарса болот:

$$\int \frac{sin^3 x}{\cos x - 3} dx = \int \frac{(cos^2 x - 1) d\cos x}{\cos x - 3} = \int \frac{t^2 - 1}{t - 3} dt.$$

158. $\int \frac{cos^3 x}{sin^4 x} dx.$

Чыгаруу. Мында интеграл астындагы функция косинуска салыштырмалуу так (түздөн-түз көрүнүп турат), ошондуктан $\sin x = t$ ордуна коюусу (подстановка) колдонулат. Анда

$$\cos x = \sqrt{1-t^2}, x = \arcsin t, dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\int \frac{cos^3 x}{sin^4 x} dx = \int \frac{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3}{t^4} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{1-t^2}{t^4} dt =$$

$$= \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-4}\, dt - \int t^{-2}\, dt = \frac{t^{-3}}{-3} - \frac{t^{-1}}{-1} + C =$$

$$= -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + C = -\frac{1}{3sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C.$$

$\cos x$ жана dx ти t аркылуу туюнтуудан баш тартса да болот, ал үчүн төмөнкүдөй өзгөртүп түзүүлөрдү жүргүзөбүз:

$$\int \frac{cos^3 x}{sin^4 x} dx = \int \frac{1 - sin^2 x}{sin^4 x} d\ \sin x = \int \frac{1-t^2}{t^4} dt.$$

159. $\int \frac{dx}{sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 5cos^2 x}.$

Чыгаруу. Интеграл астындагы функция синуска жана косинуска салыштырмалуу жуп:

$$\frac{1}{(-\sin x)^2 - 4(-\sin x)(-\cos x) + 5(-\cos x)^2} =$$

$$= \frac{dx}{sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 5cos^2 x},$$

ошондуктан $tg\, x = t$ подстановкасын колдонобуз, анда

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\sin x = tg\, x \cdot \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$x = arctg\, t, \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2};$$

төмөнкүнү алабыз

$$\int \frac{dx}{sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 5cos^2 x} =$$

$$= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2} - 4\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} + 5\frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2 - 4t + 5} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t-2)^2 + 1} = \int \frac{d(t-2)}{(t-2)^2 + 1} = arctg\,(t-2) + C =$$

$$= arctg\,(tg\, x - 2) + C.$$

Эскертүү. $\cos x, \sin x$ жана dx ти t аркылуу туюнтуудан баш тартса да болот, ал үчүн төмөнкүдөй өзгөртүп түзүүлөрдү жүргүзөбүз:

$$\int \frac{dx}{sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 5cos^2 x} =$$

$$= \int \frac{dx}{cos^2 x(tg^2 x - 4tg\, x + 5)} = \int \frac{dt}{t^2 - 4t + 5}.$$

160. $\int \frac{dx}{sin^3 x}$.

Чыгаруу. Жеке ордуна коюулар (подстановкалар) колдонулганда көбүнчө универсалдык ордуна коюуга (подстановкага) караганда жөнөкөй эсептөөлөргө алып келет, бирок универсалдык ордуна коюулар кыска жолду камсыз кылышы да мүмкүн. Ордуна коюуларды (подстановканы) тандоодо белгилүү этияттык керек. Каралып жаткан учурда интеграл астындагы функция синуска салыштырмалуу так (түздөн-түз көрүнүп турат), ошондуктан $\cos x = t$ ордуна коюусу (подстановкасы) колдонулат. Мындай ордуна коюуда (подстановкада) төмөнкүнү алабыз

$$\int \frac{dx}{sin^3 x} = \int \frac{\sin x\, dx}{sin^4 x} = -\int \frac{d(\cos x)}{(1 - cos^2 x)^2} = -\int \frac{dt}{(1 - t^2)^2} =$$

$$= -\int \frac{dt}{(1 - t)^2 (1 + t)^2}.$$

Ошентип, жеке ордуна коюуну (подстановканы) колдонуп, биз рационалдык бөлчөктөгү өтө жөнөкөй эмес интегралга келдик. Универсалдуу ордуна коюуну (подстановканы) колдонуп көрөбүз $tg\,\frac{x}{2} = t$, анда

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\int \frac{dx}{sin^3 x} = \int \frac{(1 + t^2)^{\mathbf{3}}}{8t^3} \frac{2dt}{1 + t^2} = \frac{1}{4}\int \frac{(1 + t^2)^{\mathbf{2}}}{t^3} dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1 + 2\mathrm{t}^2 + t^4}{\mathrm{t}^3} dt = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^3} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} + \frac{1}{4}\int t dt =$$

$$= -\frac{1}{8t^2} + \frac{1}{2}\ln|t| + \frac{1}{8}t^2 + C$$

$$= -\frac{1}{8\,tg^2\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\ln\left|tg\ \frac{x}{2}\right| + \frac{1}{8}tg^2\frac{x}{2} + C.$$

Эсептөөлөр жетишерлик жөнөкөй болду, демек универсалдуу ордуна коюуну (подстановканы) колдонуу ыңгайлуу болду.

161. $\int cos^4 x sin^3 x\, dx.$

162. $\int cos^5 x sin^3 x\, dx.$

163. $\int \frac{sin^3 x}{1+cos^2 x} dx.$

164. $\int \frac{cos^3 x}{4sin^2 x-1} dx.$

165. $\int \frac{dx}{3cos^3 x+4sin^2 x}.$

166. $\int \frac{dx}{19sin^2 x-8\sin x\cdot\cos x-3}.$

§ 1.7. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ФУНКЦИЯЛАРДЫН КЭЭ БИР ИНТЕГРАЛДАРЫ

1. Синустардын жана косинустардын көбөйтүндүлөрүн интегралдоо. Тригонометриянын формулалары

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta), \quad (1)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta), \quad (2)$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) \quad (3)$$

синустардын жана косинустардын көбөйтүндүлөрүн ошол эле функциялардын сызыктуу комбинациясы түрүндө (башка

аргументтер менен) жана каралган учурда интегралдоо үчүн колдонулушу мүмкүн.

167. $\int \sin 4x \sin 6x \, dx.$

Чыгаруу. (2) формуланы колдонуп төмөнкүнү алабыз

$$\int \sin 4x \sin 6x \, dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx - \frac{1}{2}\int \cos 10x \, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{20}\sin 10x + C.$$

168. $\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{4} dx.$

169. $\int \cos 4x \cos 7x \, dx.$

170. $\int \sin\frac{x}{3}\sin\frac{x}{2} dx.$

171. $\int \sin 3x \cos 10x \, dx.$

172. $\int \sin 3x \, sin^2 \, x \, dx.$

2. $\int \boldsymbol{sin^m xcos^n xdx}$ **(** $\boldsymbol{m}$ **же** $\boldsymbol{n}$ **– так оң бүтүн сан) интегралын эсептөө.** Эгерде тригонометриялык функциялардын бирөөсүнүн даража көрсөткүчү – так оң бүтүн сан болсо, анда башка функцияны t деп кабыл алып, каралып жаткан интегралды таблицалык интегралга алып келебиз.

173. $\int \sqrt[3]{sin^2x} \; cos^3xdx.$

Чыгаруу. Мында косинустун даража көрсөткүчү үчкө барабар, ошондуктан $\sin x = t, \cos x dx = dt$ ордуна коюусун (подстановка) кылабыз, анда

$$\int \sqrt[3]{sin^2x} \; cos^3xdx = \int \sqrt[3]{sin^2x} \; (1 - sin^2x) \cos x \, dx =$$

$$= \int \sqrt[3]{t^2}\ (1 - t^2)dt = \int t^{\frac{2}{3}}dt - \int t^{\frac{8}{3}}dt = \frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{11}t^{\frac{11}{3}} + C =$$

$$= \frac{3}{5}\sqrt[3]{sin^5 x} - \frac{3}{11}\sqrt[3]{sin^{11}x} + C.$$

174. $\int sin^5 x cos^4 x\, dx$.

175. $\int sin^{\frac{3}{5}} x cos^5 x\, dx$.

176. $\int \frac{sin^3 x}{\sqrt[3]{cos^4 x}} dx$.

3. $\int sin^m x cos^n x dx$ ($m + n$ – жуп терс бүтүн сан) интегралын эсептөө. Эгерде синустун жана косинустун көрсөткүчтөрүнүн суммасы жуп терс сан болсо, $\operatorname{tg} x = t$ ордуна коюу (подстановка) интегралды таблицалыкка алып келет.

177. $\int \frac{dx}{\sqrt{cos^7 x \sin x}}$.

Чыгаруу. Мында $m + n = -\frac{7}{2} - \frac{1}{2} = -4$ жуп терс сан, ошондуктан $\operatorname{tg} x = t$ ордуна коюуну (подстановка) колдонобуз:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{cos^7 x \sin x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{cos^8 x \operatorname{tg} x}} = \int \frac{dx}{cos^4 x\sqrt{\operatorname{tg} x}} =$$

$$= \int \frac{sec^2 x d \operatorname{tg} x}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = \int \frac{(t^2 + 1)dt}{\sqrt{t}} = \int t^{\frac{3}{2}}dt + \int t^{-\frac{1}{2}}dt =$$

$$= \frac{2}{5}t^{\frac{2}{5}} + 2t^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{\operatorname{tg}^5 x} + 2\sqrt{\operatorname{tg} x} + C.$$

178. $\int \frac{dx}{\cos x sin^3 x}$.

180. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{sin^3 x cos^5 x}}$.

179. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x cos^3 x}}$.

4. $\boldsymbol{\int sin^m x cos^n x dx}$ **(** $\boldsymbol{m}$ жана $\boldsymbol{n}$ **– жуп терс эмес сандар) интегралын эсептөө.** Тригонометриянын формулаларын колдонуу

$$sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad cos^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

косинустун жана синустун даражасынын көрсөткүчтөрүн эки эселеп кайталап азайтат, жыйынтыгында каралып жаткан интегралдарды константалардын жана так косинустун жана синустун интегралдарынын суммасына алып келет.

181. $\int sin^2 x cos^4 x dx$.

Чыгаруу.

$$\int sin^2 x cos^4 x dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,(1+\cos 2x)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1+\cos 2x - cos^2 2x - cos^3 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(1+\cos 2x - \frac{1+\cos 4x}{2} - \frac{1+\cos 4x}{2}\cos 2x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int (1+\cos 2x - \cos 4x - \cos 4x \cos 2x)\, dx.$$

(1) формуласы боюнча

$$\cos 4x \cos 2x = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 6x,$$

алабыз

$$\int sin^2 x cos^4 x dx = \frac{1}{16}\int\left(1+\frac{1}{2}\cos 2x - \cos 4x - \frac{1}{2}\cos 6x\right)dx =$$

$$= \frac{x}{16} + \frac{\sin 2x}{64} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin 6x}{192} + C.$$

182. $\int cos^2 x dx.$

183. $\int cos^4 x dx.$

184. $\int sin^4 x dx.$

185. $\int sin^4 x cos^2 x dx.$

186. $\int cos^6 x dx.$

§ 1.8. КЭЭ БИР АЛГЕБРАЛЫК ИРРАЦИОНАЛДЫК ФУНКЦИЯЛАРДЫ ИНТЕГРАЛДОО.

1. $\int \boldsymbol{R(x, \sqrt[n]{x})dx}$ ($\boldsymbol{n}-$ натуралдык сан). $R(x, \sqrt[n]{x})$ символу x жана $\sqrt[n]{x}$ тен рационалдык функцияны түшүндүрөт. Функция $\frac{3x-\sqrt[3]{x}}{x^2+\sqrt[4]{x}} = \frac{3x-(\sqrt[12]{x})^4}{x^2+(\sqrt[12]{x})^3}$ үчүн $R(x, \sqrt[12]{x})$. $x = t^n$ ($n-$ x интеграл астындагы функцияга кирген бардык радикалдардын көрсөткүчтөрүнүн жалпы эн кичине эселүүсү) ордуна коюу (подстановка) каралган интегралды рационалдаштырат, б.а. аны рационалдык бөлчөк интегралына алып келет.

Эскертүү. $\int R(x,\ x^r, x^s, \dots)dx$, мында $r, s \dots -$ каралуучу типке кирген рационалдык сандар, анткени эгерде $n-$ $r, s \dots$, бөлчөктөрүнүн жалпы бөлүүчүсү болсо, анда интеграл астындагы функция x жана $x^{\frac{1}{n}}$ ден рационалдуу функция болот.

187. $\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}dx.$

Чыгаруу. Мында x интеграл астындагы функциянын радикал астына 2 жана 3 көрсөткүчү менен кирет. Көрсөткүчтөрдүн жалпы эң кичине эселүүсү 6, ошондуктан төмөнкүдөй ордуна коюу (подстановка) кылабыз:

$$x = t^6, dx = 6t^5\, dt,$$

анда

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}} dx$$
$$= \int \frac{t^3}{t^6 - t^4} 6t^5\, dt$$
$$= 6\int \frac{t^4}{t^2 - 1} dt = 6\int \frac{t^4 - 1 + 1}{t^2 - 1} dt =$$
$$= 6\int (t^2 + 1) dt$$
$$+ 6\int \frac{dt}{(t-1)(t+1)}$$
$$= 2t^3 + 6t + 3\int \frac{(t+1) - (t-1)}{(t-1)(t+1)} dt =$$
$$= 2t^3 + 6t + 3\int \frac{dt}{t-1} - 3\int \frac{dt}{t+1}$$
$$= 2t^3 + 6t + 3\ln|t-1| - 3\ln|t+1| + C =$$
$$= 2t^3 + 6t + 3\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = 2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} + 3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt[6]{x} + 1}\right| + C.$$

188. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx.$ **189.** $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}.$ **190.** $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}} dx.$

2. $\int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x}, \sqrt[n]{\frac{\boldsymbol{ax+b}}{\boldsymbol{cx+d}}}\right)\boldsymbol{dx}$ **(** $\boldsymbol{n}$ – натуралдык сан).

Бул түрдөгу интегралдар төмөнкү ордуна коюу (подстановка) менен рационалдашат

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^n$$

($n-$ $\frac{ax+b}{cx+d}$ интеграл астындагы функцияга кирген бардык радикалдардын көрсөткүчтөрүнүн жалпы эн кичине эселүүсү).

191. $\int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx.$

Чыгаруу. Сунуш кылынган $\frac{1-x}{1+x}=t^2$ ордуна коюу (подстановка) төмөнкүлөрдү берет

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2}; dx=-\frac{4t}{(1+t^2)^2}dt, 1-x=\frac{2t^2}{1+t^2}.$$

Ошондуктан

$$\int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=-\int \frac{(1+t^2)^2}{4t^4}t\frac{4t}{(1+t^2)^2}=$$

$$=\int \frac{dt}{t^2}=\frac{1}{t}+C=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C.$$

192. $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}dx.$

194. $\int \frac{1}{(1-x)(1+x)^2}\cdot\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx.$

193. $\int \frac{\sqrt[3]{3x+4}}{1+\sqrt[3]{3x+4}}dx.$ **195.** $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{(1+x)^2}.$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ **түрүндөгү интеграл**. Бул түрдөгү интегралдар тамыр астындагы толук квадратты бөлүп алгандан кийин сызыктуу ордуна коюулары (подстановка) менен төмөнкүдөй түргө келтирилет:

1) эгерде $a > 0 -$ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}$ деген таблицалык интегралга,

2) эгерде $a > 0 -$ $\int \frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}}$ деген таблицалык интегралга.

196. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+3}}.$

Бул түргө төмөнкүдөй түрдөгү интегралдар дагы киришет

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^r, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^s, \dots\right]dx,$$

Мында $r.s, \dots -$ рационалдык сандар, анткени эгерде $n - \ r.s$ бөлчөктөрдүн жалпы бөлүүчүсү болсо, анда интеграл астындагы функция x жана $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{n}}$ ден рационалдык функция болот.

Чыгаруу.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{23}{16}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{1}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x^2-x+3}\right| + C.$$

197. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x-3x^2}}$.

Чыгаруу.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{5}{3}-\frac{3}{2}x-x^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2-\left(x+\frac{1}{3}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} arc\sin\frac{3x+1}{4} + C.$$

198. $\int \frac{dx}{x\sqrt{10x^2-6x+1}}$.

Чыгаруу. Берилген интеграл “тескери подстановканын” $x = \frac{1}{t}$ жардамы менен $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ түрүндөгү интегралга келтирилет. Чындыгында, $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{1}{t^2}dt$ деп алып, төмөнкүнү алабыз

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{10x^2-6x+1}} = \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{10}{t^2}-\frac{6}{t}+1}} = \int \frac{-dt}{\sqrt{10-6t+t^2}} =$$

$$-\int \frac{d(t-3)}{\sqrt{1+(t-3)^2}} = -\ln\left|t-3+\sqrt{10-6t+t^2}\right| + C =$$

$$= -\ln\left|\frac{1}{x}-3+\sqrt{10-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}\right| + C.$$

199. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

Чыгаруу. $xdx = \frac{1}{2}d(x^2+4x+5) - 2dx$ экендигин байкап, төмөнкүнү алабыз

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4x+5}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+4x+5)}{\sqrt{x^2+4x+5}} - 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}} =$$

$$= \sqrt{x^2+4x+5} - 2\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+1}} = \sqrt{x^2+4x+5} -$$

$$-2\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right| + C.$$

200. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+3x+2}}$.

201. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-5x+3}}$.

202. $\int \frac{dx}{x\sqrt{7x^2+2x+5}}$.

203. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$.

204. $\int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{2x^2-3x+5}}$.

205. $\int \frac{(4x+7)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.

4. $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ **түрүндөгү интеграл.** Бул түрдөгү интегралдарды табуу үчүн (3 пунктунун интегралдары да таандык) көптөгөн ар түрдүү ыкмалар жашайт. Бул жерде бир гана – “тригонометриялык ордуна коюу (подстановка) ыкмаларын” карайбыз. Радикал астындагы функциядан толук квадратты бөлүп алып (сызыктуу подстановканы аткаргандан кийин) каралуучу интегралдар төмөнкү үч түрлөрдүн бирөөсүнө келтирилет:

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx,\ \int R\left(x,\sqrt{x^2+a^2}\right)dx,\ \int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx.$$

Бул үч түрдөгү интегралдар “тригонометриялык подстановкалар” менен синустан жана косинустан рационалдуу көз каранды функциялардын интегралдарына келтирилет (кара. 6). Ал үчүн интегралдарда:

1) $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\,\right)dx$ те $x=a\sin t$ же $x=a\cos t$ ордуна коюу (подстановка) кылабыз;

2) $\int R\left(x,\sqrt{x^2+a^2}\,\right)dx$ те $x=a\,\mathrm{tg}\,t$ же $x=a\,ct\mathrm{g}\,t$ ордуна коюу (подстановка) кылабыз;

3) $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\,\right)dx$ те $x=\frac{a}{\cos t}$ же $x=\frac{a}{\sin t}$ ордуна коюу (подстановка) кылабыз.

$\int R(\sin x,\cos x\,)\,dx$ түрүндөгү интегралдар 6-параграфта көрсөтүлгөндөй рационалданат. Ошентип, $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ түрүндөгү интеграл дайыма рационалдашкан болушу мүмкүн.

206. $\int\frac{dx}{(x^2+16)\sqrt{9-x^2}}$.

Чыгаруу. Берилген интеграл төмөнкү түрдөгү интегралдарга тиешелүү

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\,\right)dx$$

ошондуктан $x=3\sin t$ ордуна коюу (подстановка) кылабыз:

$$\int\frac{dx}{(x^2+16)\sqrt{9-x^2}}=\int\frac{3\cos t\,dt}{(9sin^2t+16)3\cos t}=$$

$$=\int\frac{dt}{25sin^2t+16cos^2t}=\int\frac{dt}{cos^2t(25t\mathrm{g}^2t+16)}=$$

$$= \int \frac{d\,\mathrm{tg}\,t}{25\mathrm{tg}^2 t + 16} = \frac{1}{25}\int \frac{d\,\mathrm{tg}\,t}{\mathrm{tg}^2 t + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{1}{20} arct\mathrm{g}\,\left(\frac{4}{5}\mathrm{tg}\,t\right) + C.$$

x аргументке кайтууга туура келет; ал үчүн тригонометриянын формуласын колдонуп, төмөнкүнү алабыз

$$\mathrm{tg}\,t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\sin t}{\sqrt{1 - sin^2 t}} = \frac{\frac{x}{3}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}} = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}},$$

ошондуктан

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 16)\sqrt{9 - x^2}} = \frac{1}{20}\mathrm{arctg}\frac{5x}{4\sqrt{9 - x^2}} + \mathrm{C}.$$

207. $\int \frac{x^2 - x + 1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} dx.$

Чыгаруу. Берилген интеграл төмөнкү түрдөгү интегралдарга тиешелүү

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\,\right) dx,$$

Ошондуктан $x = \mathrm{tg}\,t$ же $x = c\mathrm{tg}\,t$.

$x = c\mathrm{tg}\,t$ ыңгайлуу ордуна коюу (подстановка) тандайбыз :

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int (ct\mathrm{g}^2 t - ct\mathrm{g}\,t + 1)(-\sin t)dt =$$

$$= \int \cos t\, dt - \int \frac{dt}{\sin t} = \sin t - \ln\left|t\mathrm{g}\frac{t}{2}\right| + C =$$

$$= \sin t + \ln\left|ct\mathrm{g}\frac{t}{2}\right| + C.$$

x аргументине кайтууга туура келет. Тригонометриянын формулаларынын жардамы менен төмөнкүнү алабыз

$$\sin t=\frac{1}{\sqrt{ctg^2 t+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\ , ctg\frac{t}{2}=\frac{\cos t+1}{\sin t}=x+\sqrt{x^2+1}.$$

Ошондуктан

$$\int\frac{x^2-x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}dx=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C.$$

208. $\int\frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{x^2-1}}$.

Чыгаруу. Берилген интеграл төмөнкү түрдөгү интегралдарга тиешелүү

$$\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx,$$

$$x=\frac{1}{\cos t},\ \text{Анда } dx=\frac{\sin t}{cos^2 t}dt$$

$$\text{жана } \int\frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{\cos t dt}{1+2cos^2 t}=\int\frac{\cos t\, dt}{3-2sin^2 t}=$$

$$=\int\frac{d\ \sin t}{3-2sin^2 t}=\int\frac{du}{3-2u^2}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2-u^2}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot 2\sqrt{\frac{3}{2}}}\int\frac{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-u\right)+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+u\right)}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+u\right)\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-u\right)}du=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{6}}\int\frac{du}{\sqrt{\frac{3}{2}}+u}+\frac{1}{2\sqrt{6}}\int\frac{du}{\sqrt{\frac{3}{2}}-u}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\sqrt{\frac{3}{2}}+u\right|-\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\sqrt{\frac{3}{2}}-u\right|+C=$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} + u}{\sqrt{\frac{3}{2}} - u} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}\sin t}{\sqrt{3} - \sqrt{2}\sin t} \right| + C,$$

$$\sin t = \sqrt{1 - cos^2 t} = \cos t \cdot \sqrt{\frac{1}{cos^2 t} - 1} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}.$$

ошондуктан ордуна коюу (подстановка) кылабыз

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2)\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{x\sqrt{3} + \sqrt{2}\,\sqrt{x^2 - 1}}{x\sqrt{3} - \sqrt{2}\,\sqrt{x^2 - 1}} \right| + C.$$

209. $\sqrt{4 - x^2}dx$.

210. $\int \frac{dx}{(9+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

211. $\int \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$.

212. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3} dx$.

213. $\int \frac{x^2}{(x^2+5)^{\frac{3}{2}}} dx$.

214. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x+x^2)^3}}$.

Көрсөтмө. $1 + x + x^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ байкап $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, tg\, t$ подстановкасын кылабыз.

215. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2} dx$.

216. $\int \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{4x^2+1}}$.

§ 1.9 ИНТЕГРАЛДООГО АРАЛАШ МИСАЛДАР

Интегралдоонун маанилүү элементтерине ээ болуш үчүн төмөнкүлөр зарыл:

1) Негизги интегралдардын таблицасын эстөө.

2) Берилген интегралды жогорудагы түрлөрдүн бирөөнө катасыз келтирүү.

3)Дал келген түргө интегралды эсептөө үчүн көрсөтмөнү колдонууну билүү, эсептөөнү анык эмес интегралды табууга чейин туура жеткирүү.

217. $\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x^4}dx.$

Чыгаруу. Бөлүктөп интегралдайбыз, ал үчүн

$$u = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right), dv = \frac{dx}{x^4},$$

$$du = \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}, v = -\frac{1}{3x^3};$$

$$\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x^4}dx = -\frac{1}{3x^3}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}.$$

Эми ордуна коюу (подстановка) менен эсептелүүчү интегралга ээ болобуз

$$x = \frac{1}{\cos t}, dx = \frac{\sin t}{cos^2 t}dt;$$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}} = \int cos^2 t\, dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C = \frac{t}{2} + \frac{\cos t \sin t}{2} + C.$$

x аргументине кайтууга туура келет; ал үчүн тригонометриянын формуласын колдонуп, төмөнкүнү алабыз:

$$\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x^4}dx = -\frac{1}{3x^2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + \frac{1}{6}arccos\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{6x^2} + C.$$

218. $\int sin^{\frac{5}{7}} x cos^3 x dx.$

219. $\int \frac{x^2+1}{x(x^2-1)} dx.$

220. $\int \frac{dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}}.$

221. $\int \cos x \cos 2x \cos 5x dx.$

222. $\int e^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$

223. $\int \frac{x^3+x^2+2}{(x^2+2)^3} dx.$

224. $\int \frac{cos^2 x}{sin^8 x} dx.$

225. $\int (x^3 + 1) \ln x \, dx.$

226. $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-4x+1}} dx.$

227. $\int \frac{4x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} dx.$

228. $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}.$

229. $\int \frac{\ln arctgx}{1+x^2} dx.$

230. $\int \frac{dx}{\cos x(1-\sin x)}.$

231. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}}.$

232. $\int cos^6 x dx.$

233. $\int \frac{x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{6}}+1}{x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{5}{6}}} dx.$

234. $\int sin^4 x cos^3 x dx.$

235. $\int \sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3} dx.$

236. $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^2} dx.$

237. $\int e^{x^3+x+1}(3x^2 + 1)dx.$

БАП 2. АНЫКТАЛГАН ИНТЕГРАЛ ЖАНА АНЫН КОЛДОНУЛУШТАРЫ

§ 2.1. НЕГИЗГИ ФОРМУЛАЛАР

1. Аныкталган интегралдын аныктамасы жана касиеттери. $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндиде аныкталсын. Кесиндини

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

чекиттери менен n бөлүккө бөлөбүз.

Бөлүктөнгөн $[x_{i-1}, x_i]$ кесиндилеринин ар биринен каалагадай ξ_i чекитин алып

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1})$$

суммасын түзөбүз, бул сумма $f(x)$ функциянын $[a,b]$ кесиндидеги интегралдык суммасы деп аталат.

Бөлүктөнгөн кесиндилердин саны чексиз көбөйүп, алардын эң чоңунун узундугу нөлгө умтулган шартта интегралдык сумманын предели $f(x)$ функциясынын $x = a$ дан $x = b$ га чейинки пределдерде аныкталган интегралы деп аталат жана төмөнкүдөй белгиленет

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i, \quad (n \to \infty). \qquad (1)$$

Эгерде функция $[a,b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болсо, анда ал бул кесиндиде интегралдануучу, б.а. (1) предели жашайт жана $[a,b]$ интегралдануучу аралыкты бөлүктөнгөн кесиндилерге бөлүү

ыкмасынан жана ар бир мындай бөлүү үчүн ξ_i чекиттерин тандоодон көз каранды болбойт.

Негизги касиеттери

1) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

2) $\int_a^b [C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)]dx = C_1\int_a^b f_1(x)dx + C_2\int_a^b f_2(x)dx,$

(C_1 , C_2 – турактуулар).

3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$

мында c –$[a, b]$ кесиндисинин ичинде же сыртында жаткан кээ бир чекит.

4) Эгерде , $a \leq x \leq b$ болгондо, $f(x) \leq \varphi(x)$ анда

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_b^a \varphi(x)dx.$$

5)Эгерде $a \leq x \leq b$ кесиндисинде $f(x)$ функциясынын m - эң кичине жана M - эң чоң мааниси болсо, анда

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

6) Эгерде $f(x)$ функциясы $a \leq x \leq b$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болсо, анда бул кесиндисинде ξ чекити табылат жана

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\cdot(b-a).$$

$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ саны $f(x)$ функциясынын $[a, b]$ кесиндисинде орточо мааниси деп аталат.

Төмөнкү маселелерде кайсы интеграл чоң экенин (эсептебестен) тапкыла:

238. а) $\int_0^1 e^{x^2}dx$ же $\int_0^1 e^x dx;$

б) $\int_1^2 e^{x^2}dx$ же $\int_1^2 e^x dx.$

Чыгаруу. а) $0 \leq x \leq b$ *болгондо* $e^{x^2} \leq e^x$*болот* , анда, 4-касиет боюнча, экинчи интеграл чоңураак.

б) $x \geq 1$ *болгондо* $e^{x^2} \geq e^x$, ошондуктан биринчи интеграл чоңураак

239. а) $\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x^4}dx$ же $\int_{-1}^{1}x^2dx$;

б) $\int_0^1 x^3cos^2dx$ же $\int_0^1 x^2cos^2dx$;

в) $\int_1^e xlnxdx$ же $\int_0^1 xln^2xdx$.

240 жана **241** интегралдарды баалоо:

240. а) $\int_0^1 \sqrt{x^2+2x+4}\,dx$;

б) $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{10+2cosx}$;

в) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{cos^2x}{x}dx$.

Чыгаруу. Бардык үч интегралды баалоо үчүн биз 5-касиетти колдонобуз.

а) $f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}$ функциясы $[0,1]$ кесиндисинде монотондуу өсөт, ошондуктан функция эң кичине жана эң чоң маанилерди кесиндинин учтарында кабыл алат:

$$m = f(0) = 2, M = f(1) = \sqrt{7} \approx 2{,}65,$$

Интегралдоонун кесиндисинин узундугу $b-a=1$, жана төмөнкүдөй баалоону алабыз

$$2 \leq \int_0^1 \sqrt{x^2+2x+4}\,dx \leq 2{,}65;$$

б) $x=\pi$ болгондо косинус -1 жана бөлүмү минималдуу болуп интеграл астындагы функция эң чоң мааниге жетет, б.а.

$\mathrm{M} = f(\pi) = \frac{1}{8}$. Ушуга окшош эле, $x = 0$ болгондо (же $x = 2\pi$) $m = f(0) = \frac{1}{12}$. Анткени $b - a = 2\pi$, анда , 5 касиети боюнча,

$$\frac{\pi}{6} \leq \int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+2cosx} \leq \frac{\pi}{4};$$

в) cos^2x жана $\frac{1}{x}$ функциясы $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ кесиндисинде монотондуу кемийт, алардын көбөйтүндүсү да монотондуу кемийт, ошондуктан интеграл астындагы функция эң кичине жана эң чоң маанилерди кесиндинин учтарында кабыл алат:

$$M = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{9}{2\pi}, \ m = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$b - a = \frac{\pi}{3}$ экендигин эске алып, төмөнкүдөй баалоону алабыз:

$$0 \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^2x}{x} dx \leq \frac{3}{2}.$$

241. а) $\int_0^2 \sqrt{9 + x^4}\, dx$; б) $\int_0^2 \frac{x^2+2}{x^2+3} dx$; в) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{ctgx}}{x} dx$.

2. Ньютон–Лейбництин формуласы. Эгерде $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болсо жана ал үчүн аныкталбаган интеграл белгилүү болсо

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

мында $F(x) - f(x)$ – функциясынын кандайдыр бир баштапкы функциясы, анда аныкталган интегралды Ньютон-Лейбництин формуласынын жардамы менен эсептөөгө болот

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad (2)$$

б.а.аныкталган интеграл интегралдоонун жогорку жана төмөнкү чектериндеги баштапкынын маанилеринин айырмасына барабар.

Эсептөөдө (2) формуланы көбүнчө төмөнкү формада жазышат

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b,$$

мында оң жактагы символ "*a дан b га алмаштыруу*" - ошол эле $F(b) - F(a)$ айырманы билдирет .

Ньютон-Лейбниц формуласын колдонуп, төмөнкү интегралдарды эсептегиле:

242. $\int_{-1}^{2} x^2 dx.$

Чыгаруу. $\int_{-1}^{2} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 3.$

243. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3 x\, dx.$

Чыгаруу. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - cos^2 x) sinx\, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - cos^2 x)\, dcosx =$

$$= \left(-cosx + \frac{cos^3 x}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(-cos\frac{\pi}{2} + \frac{cos^3\frac{\pi}{2}}{3}\right) - \left(-cos0 + \frac{cos^3 0}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

244. $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-(lnx)^2}}.$

Чыгаруу. $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-(lnx)^2}} = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dlnx}{x\sqrt{1-(lnx)^2}} = arcsinlnx|_1^{\sqrt{e}} = arcsinln\sqrt{e} - arcsinln1 = arcsin\frac{1}{2} - arcsin0 = \frac{\pi}{6}.$

245. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx.$

246. $\int_0^1 \sqrt{1+x} dx.$

249. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{cos^2 x dx}{\sqrt[3]{sinx}} dx.$

250. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}.$

247. $\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{(x^2+1)^2}$.

251. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$.

248. $\int_{1}^{e}\frac{1+lnx}{x}dx$.

Төмөнкү маселелерде функциянын көрсөтүлгөн кесиндидеги орточо маанисин тапкыла::

252. $f(x)=cos^2x\ (0\ \le\ x\ \le\ \pi)$.

Чыгаруу. Берилген кесиндидеги функциянын орточо маанисинин аныктамасы боюнча төмөнкүгө ээ болобуз

$$f(\xi)=\frac{1}{\pi-0}\int_{0}^{\pi}cos^2xdx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{1+cos2x}{2}dx=\frac{1}{2\pi}\left(x+\frac{sin2x}{2}\right)\Big|_{0}^{\pi}=\frac{1}{2}.$$

253. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\ \ (0\le x\le 1)$.

254. $f(x)=tg^2x\ \ \left(0\le x\le\frac{\pi}{4}\right)$.

§ 2.2. АНЫКТАЛГАН ИНТЕГРАЛДАРДЫ ЭСЕПТӨӨНҮН ЫКМАЛАРЫ

1. Өзгөрмөлөрдү алмаштыруу. Көбүнчө $\int_{a}^{b}f(x)dx$ интегралын эсептөө үчүн $x=\varphi(t)$ же $t=\psi(x)$ ордуна коюунун жардамы менен интегралдык өзгөрмө x ты жаңы t өзгөрмөсүнө алмаштыруу пайдалуу. Ошондой эле интегралдоонун эски a жана b чектеринен жаңы α жана β чектерине өтүү зарыл, алар төмөнкү теңдемелерден аныкталат.

$$a=\varphi(\alpha),b=\psi(\beta)$$

Өзгөрмөлөрдү алмаштыруу төмөнкү формула аркылуу жүргүзүлөт

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

Атап айтканда, эгерде $f(x)$ – үзгүлтүксүз функция болсо, жана $x = \varphi(t)$ алмаштыруунун өзү үзгүлтүксүз жана $[\alpha, \beta]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз туундуга ээ болсо, бул формула орун алат. Аныктаган интегралды өзгөрмөлөрдү алмаштыруу ыкмасы менен эсептөөдө, аныкталбаган интегралдоодон айырмаланып, эски өзгөрмөгө кайтуу талап кылынбагандыгын баса белгилейбиз.

Төмөнкү маселелерде ылайыктуу алмаштырууларды колдонуп интегралдарды эсептегиле:

255. $\int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Чыгаруу. $x = t^2$ $(t > 0)$ деп алып интегралдоонун жаңы өзгөрүлмөсүнө өтөбүз. $x = 0$ болгондо $t = 0$ алабыз, ал эми $x = 4$ болгондо $t = 2$, ошондуктан (1) формулага ылайык төмөнкүгө ээ болобуз

$$\int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_1^2 \frac{2tdt}{1+t} = 2\int_1^2 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = 2(t - ln|1+t|)|_0^2 = 4 - 2ln3.$$

256. $\int_0^1 \sqrt{4 - x^2}dx$.

Чыгаруу. $x = 2sint$ деп алалы. Мындай алмаштыруу мүмкүн (анткени t нын каалаган мааниси үчүн тамырдын астында терс эмес маани алынат) жана интегралдык белгинин астындагы тамырдын жок болушуна алып келет. Мында x өзгөрмөсүнүн $x = 0$ дөн $x = 1$ ге чейин өзгөрүшү t өзгөрмөнүн $t = 0$ ден $t = \frac{\pi}{6}$ га

өзгөрүшүнө туура келет. (1) формуланы колдонуу менен, төмөнкүнү алабыз

$$\int_0^1 \sqrt{4-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4-4sin^2t}\cdot 2costdt = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} cos^2tdt =$$

$$== 2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+cos2t)dt = 2\left(t+\frac{sin2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

257. $\int_0^{ln5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx.$

Чыгаруу. $t=\sqrt{e^x-1}$ деп алалы, анда

$$e^x = t^2+1 \text{ жана } exdx = 2tdt.$$

$x=0$ болгондо $t=\sqrt{e^x-1}$=0, $x=ln5$ болгондо $t=$ $\sqrt{e^{ln5}-1}=\sqrt{5-1}=2$, ошондуктан

$$\int_0^{ln5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$$

$$=\int_0^2\frac{t\cdot 2tdt}{t^2+4} = 2\int_0^2\frac{t^2dt}{t^2+4} = 2\int_0^2\left(1-\frac{4}{t^2+4}\right)dt =$$

$$= 2\left(t-2arctg\frac{t}{2}\right)\Big|_0^2 = 2(2-2arctg1) = 4-\pi.$$

258. Жуп функция үчүн $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$, ал эми так функция үчүн $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ далилдегиле.

Чыгаруу. $[-a,a]$ интегралдоонун кесиндисин $x=0$ чекити менен эки бөлүккө бөлөбүз. Анда § 2.1деги 3 касиети боюнча, төмөнкүнү алабыз

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx. \quad (2)$$

Биринчи интегралдагы бул барабардыктын оң бөлүктөгү $x = -t$ деп коюп (1) формула боюнча төмөнкүгө ээ болобуз

$$J_1 = \int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(-t)(-dt) = -\int_{a}^{0} f(-t)dt.$$

Акыркы интегралда интегралдоонун чектерин кайра иретке келтиребиз (ал интегралдын белгисин өзгөртөт) жана интегралдоонун өзгөрмөсүн кайрадан x тамгасы менен белгилейбиз (интегралдын мааниси интегралдоонун өзгөрмөсү кайсы тамга менен белгиленгенине көз каранды эмес), төмөнкүнү алабыз

$$J_1 = \int_0^a f(-t)dt = \int_0^a f(-x)dx.$$

Эми (2) барабардыгы төмөнкү түргө ээ

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} [f(x) + f(-x)]dx,$$

же жуп функция үчүн $f(-x) = f(x)$ жана так функция үчүн $f(-x) = -f(x)$ экенин эске алып, төмөнкү түргө ээ болобуз

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)dx, \text{эгерде } f(x) \text{ жуп,} \\ 0, \qquad \text{эгерде } f(x) \text{ так.} \end{cases}$$

258дин натыйжасын колдонуп, **259** жана **260** интегралдарын эсептегиле.

259. а) $\int_{-\pi}^{\pi} sinmx\ cosnx\ dx$;

б) $\int_{-1}^{1}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}\right)arcsinxdx$;

в) $\int_{-2}^{2}(x^5 + 5x^4 - 3x^3 + x)dx$;

г) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(cos^2x + x^4 sinx)dx$.

Чыгаруу. а) жана б) интегралдар нөлгө барабар, анткени интеграл астындагы функциялар так (текшериңиз!), ал эми интегралдоонун кесиндилери $[-a, a]$ түрүнө ээ (мурунку маселени караңыз); в) интегралды эки интегралдын суммасы катары көрсөтөлү, алардын бири так функциядан (нөлгө барабар), экинчиси жуп функциядан оңой эсептелинет. Анда

$\int_{-2}^{2}(x^5 + 5x^4 - 3x^3 + x)dx$=$\int_{-2}^{2}(x^5 - 3x^3 + x)dx + 5\int_{-2}^{2} x^4dx =$

$10\int_{0}^{2} x^4dx = 64.$

Ушундай эле, x^4sinx функциясы так жана cos^2x жуп экенин эске алып, г) интегралы үчүн төмөнкүнү алабыз

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(cos^2x + x^4sinx)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^4sinxdx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^2xdx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos^2xdx =$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + cos2x}{2}dx = \left(x + \frac{sin2x}{2}\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

260. $\int_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}.$

261. $\int_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}.$

262. $\int_{0}^{1} x^2\sqrt{1 - x^2}dx.$

263. $\int_{0}^{2} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}.$

264. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+sinx+cosx}.$

265. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+2sin^2x}.$

266. а) $\int_{-2\pi}^{2\pi} x^4 2sin^3 xdx;$

б) $\int_{-1}^{1}(e^x + e^{-x})tgxdx;$

в) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(sin2x + cos\frac{\pi}{2} + tgx\right)dx;$

г) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^7 - 3x^5 + 2x^3 - x + 4}{cos^2 x}dx.$

2. Бөлүктөп интегралдоо. Эгерде $u(x)$ жана $v(x)$ функцияларынын $[a, b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз туундулары бар болсо, анда аныкталган интеграл үчүн бөлүктөп интегралдоо туура болот:

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu, \qquad (3)$$

мында $uv|_a^b$ белгиси $u(b)v(b) - u(a)v(a)$ айырманы билдирет. Аныкталбаган интеграл үчү үчүн бөлүктөп интегралдоонун формуласын колдонууга байланыштуу мурунку бөлүмдө айтылгандардын баары (3) формулага да тиешелүү.

(3) формуланы колдонуп, төмөнкү интегралдарды эсептегиле:

267. $\int_0^3 xarctgxdx.$

Чыгаруу. $arctgx = u$ деп алсак ,$xdx = dv$, анда

$$du = \frac{dx}{1 + x^2}, \quad v = \frac{x^2}{2}.$$

Алынган маанилерди (3) формулага коюп, төмөнкүнү алабыз

$$\int_0^3 xarctgxdx = \frac{x^2}{2}arctgx\Big|_0^3 - \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{x^2dx}{1+x^2} = \frac{9}{2}arctg3$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^3 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{9}{2}arctg3 - \frac{1}{2}(x - arctgx)|_0^3 = 5arctg3 - \frac{3}{2}.$$

268. $\int_1^e (1+lnx)^2 dx.$

Чыгаруу. $u = (1+lnx)^2$ деп алып, $dv = dx$, мындан

$$du = 2(1+lnx)\frac{dx}{x}, \quad v = x,$$

ошондуктан

$$J = \int_1^e (1+lnx)^2 dx = x(1+lnx)^2|_{-1}^{e} - 2\int_1^e (1+lnx)\,dx.$$

Акыркы интегралга (3) формуласын дагы бир жолу колдонуп, $u = 1 + lnx, dv = dx$ и $du = \frac{dx}{x}, v = x$

$$J = x(1+lnx)^2|_{-1}^{e} - 2\left[x(1+lnx)|_1^e - \int_1^e dx\right] = 2e - 1.$$

269. $\int_0^1 xe^{-x}\,dx.$

270. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{sin^2x}.$

271. $\int_1^2 xlnx\,dx.$

272. $\int_1^3 lnx\,dx.$

273. $\int_0^{\frac{1}{2}} arcsinx\,dx.$

274. $\int_0^{\pi} x^3 sinx\,dx.$

275. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} cosx\,dx.$

276. $\int_1^e \sin(lnx)\,dx$.

Көрсөтмө. Акыркы эки маселеде бөлүктөп кош интегралдоо изделүүчү интегралга карата теңдемеге алып келет.

3. Рекурренттик формулаларды колдонуу. Кээде аныкталган интегралды эсептөө үчүн рекуренттик (кайталануу) формулалары колдонулат. **277** жана **278** мисалдарда колдонуу менен биз мунун кантип жасалганын көрсөтөбүз.

277. Интегралдар үчүн рекуренттик формулаларын түзгүлө

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n xdx \text{ и } \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n xdx \ (n\geq 0 - \text{бүтүн}).$$

Чыгаруу. Алгач бул интегралдардын экөө тең барабар экенин белгилейли. Чындыгында, экинчи интегралдагы $cosx$ ти $sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ менен алмаштырып жана $\frac{\pi}{2} - x = t$ өзгөрмөсүн алмаштырып, төмөнкүнү алабыз

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n xdx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 sin^n tdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n xdx.$$

Эми $n \geq 2$ болгондо $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n xdx$ эсептейбиз. Бөлүктөп интегралдоонун формуласын колдонобуз $u = sin^{n-1}x$ деп алып, $dv = sinxdx$. Анда $du = (n-1)sin^{n-2}xcosxdx$, $v = -cosx$, жана

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n xdx = -sin^{n-1}x \cdot cosx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-2}xcos^2 xdx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-2}x(1-sin^2x)dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-2}xdx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n xdx\,,$$

же

$$J_n = (n-1)J_{n-2} - (n-1)J_n.$$

Бул теңдемени J_n ге карата чыгарып, төмөнкүнү алабыз

$$J_n = \frac{n-1}{n}J_{n-2}. \qquad (4)$$

Эки учурду карайбыз:

1) $n = 2m-$ жуп сан (4) формуласын m жолу колдонуу төмөнкүнү берет:

$$J_{2m} = \frac{2m-1}{2m}J_{2m-2} = \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}J_{2m-4}$$

$$= \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\frac{2m-5}{2m-4}J_{2m-6} =$$

$$= \ldots = \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\frac{2m-5}{2m-4}\ldots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}J_0,$$

бирок

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^0 xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Ошондуктан

$$J_{2m} = \frac{(2m-1)(2m-3)(2m-5)\ldots 1}{2m(2m-2)(2m-4)\ldots 2}\cdot\frac{\pi}{2}; \qquad (5)$$

2) $n = 2m+1-$ так сан. Кайрадан (4) формуласын m жолу колдонуп төмөнкүнү алабыз

3) $J_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1}J_{2m-1} = \frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}J_{2m-3} = \cdots = \frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot \frac{2m-4}{2m-3}\ldots\frac{2}{3}J_1,$

же, төмөнкүнү эске алып

$$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxdx = 1,$$

$$J_{2m+1} = \frac{2m(2m-2)(2m-4)\dots 2}{(2m+1)(2m-1)(2m-3)\dots 3}. \qquad (6)$$

(5) жана (6) формулаларын бириктирип, төмөнкүгө ээ болобуз

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n xdx = \begin{cases} \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\dots 1}{n(n-2)(n-4)\dots 2} \cdot \frac{\pi}{2} & n \text{ жуп болгондо,} \\ \frac{n(n-2)(n-4)\dots 2}{(n+1)(n-1)(n-3)\dots 3} & n \text{ так болгондо.} \end{cases} \qquad (7)$$

278. Мурунку маселенин (7) формуласын колдонуп, интегралдарды эсептегиле:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3 xdx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4 xdx$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^5 xdx$; г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^6 xdx$.

Чыгаруу. Маселенин шартында көрсөтүлгөн формуланы колдонуу менен биз төмөнкүлөрдү алабыз:

а) $n = 3$ (так!), $J_3 = \frac{2}{3}$;

б) $n = 4$ (жуп!), $J_4 = \frac{3\cdot 1}{4\cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{16}\pi$;

в) $n = 5$, $J_5 = \frac{4\cdot 2}{5\cdot 3} = \frac{8}{15}$;

г) $n = 6$, $J_6 = \frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5}{32}\pi$.

279. Интегралдын рекуренттик формуласын жаз

$$J_n = \int_0^{\pi} cos^n xdx.$$

280. Мурунку маселелердин жыйынтыгын колдонуп, интегралдарды эсептегиле:

а) $\int_0^{\pi} cos^8 x dx$; б) $\int_0^{\pi} cos^{11} x dx$.

281. $J_n = \int_0^{2\pi} sin^n x dx$ интегралынын рекуренттик формуласын чыгаргыла жана төмөнкү интегралды эсептегиле

$$\int_0^{2\pi} sin^{10} x dx \text{ и } \int_0^{2\pi} sin^7 x dx.$$

282. **111**де алынган рекуренттик формуласынын жардамы менен, төмөнкү интегралды эсептегиле

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^4}.$$

§ 2.3. АНЫКТАЛГАН ИНТЕГРАЛДАРДЫ ЖАКЫНДАШТЫРЫП ЭСЕПТӨӨ

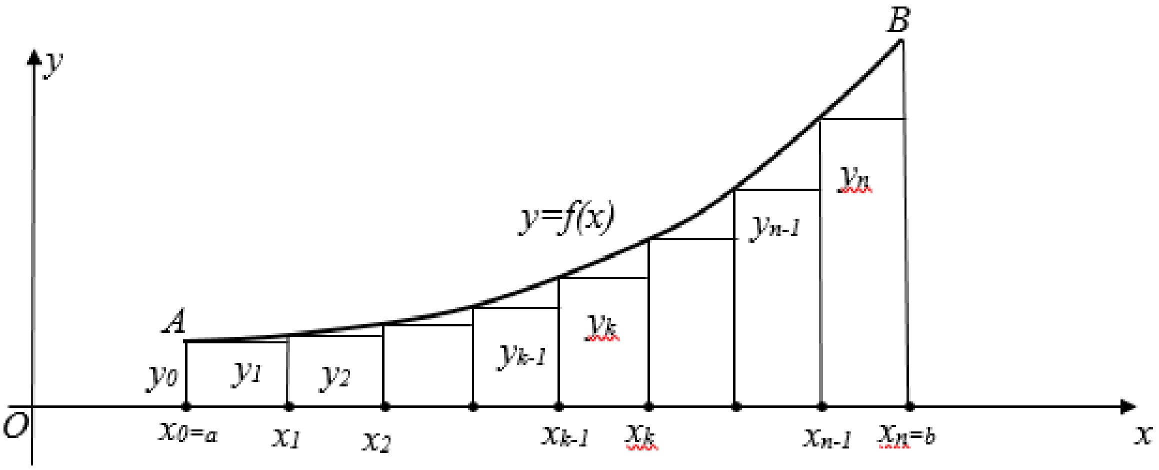
1. Тик бурчтуктардын ыкмасы. $\int_a^b f(x)dx$ интегралын эсептөө үчүн $[a, b]$ кесиндисин чекиттер боюнча n бирдей бөлүккө бөлөбүз

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

жана $y = f(x)$ функциянын дал келүүчү маанилерин

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$$

аркылуу белгилейбиз.



Сүр. 1

Жакындаштырып коёбуз

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx y_{k-1}\Delta x_k \qquad (k = 1, 2, \dots, n) \tag{1}$$

мында

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}, \qquad x_k = a + k\frac{b-a}{n}.$$

Бул $aABb$ ийри сызыктуу трапеция бөлүнгөн ар бир тилкенин аянты бийиктиги y_{k-1} жана негизи Δx_k болгон тик бурчтуктун аянтына алмаштырылат дегенди билдирет (1-сүрөт).

$k = 1,2, \dots, n$ үчүн болжолдуу барабардыктарды (1) кошуп, тик бурчтуктардын формуласын алабыз

$$J = \int_n^b f(x)dx \approx S_n = \sum_{k=1}^n y_{k-1}\ \Delta x_k = \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}). \tag{2}$$

Эгерде $f'(x)$ жашаса жана $[a, b]$ кесиндисинде чектелсе, анда (2) формуланын δ_n катасы үчүн төмөнкү баалоо орун алат.

$$|\delta_n| = |J - S_n| \le \frac{M_1(b-a)^2}{2n}, \tag{3}$$

мында M_1– $[a, b]$ кесиндидеги $f'(x)$ модулунун максимуму.

283. Тик бурчтук формуласын колдонуп ($n = 10$ менен) $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ жакындаштырып эсептегиле. Үтүрдөн кийинки үч белги менен эсептегиле. Кетирилген катаны баалагыла.

Чыгаруу. $[1, 2]$ кесиндисин $x_0 = 1, x_1 = 1{,}1, x_2 = 1{,}2, \dots, x_{10} = 2$ чекиттери менен 10 барабар бөлүкчөлөргө бөлөбүз

Таблица 1.

x_k	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
y_k	1,000	0,909	0,833	0,769	0,714	0,667	0,625	0,588	0,556	0,526	0,5

Бул чекиттердеги $y = \frac{1}{x}$ функциясынын маанилерин табабыз. $\sum_{k=0}^{9} y_k = 7{,}187$ алабыз. (2) формуласы боюнча, төмөнкүнү табабыз

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{2-1}{10} \cdot 7{,}187 \approx 0{,}719.$$

Бул учурда жол берилген катаны (3) формуласын колдонуп эсептейбиз. Анткени $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, анда $[1, 2]$ кесиндиде $|f'(x)| = \frac{1}{x^2}$ монотондуу кемийт, ошондуктан

$$M_1 = \max_{1 \le x \le 2} |f'(x)| = f'(1) = 1 \text{ жана } |\delta_{10}| \le \frac{1}{20} = 0{,}05.$$

Кетирилген ката үтүрдөн кийинки экинчи баскычта таасир эткендиктен, үчүнчү белгини тегеректөө керек жана акырында

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = 0{,}72 \pm 0{,}05.$$

Экинчи жагынан, Ньютон-Лейбниц формуласы боюнча,

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = lnx|_1^2 = ln2 - ln1 = ln2.$$

Натыйжада, $ln2$ нин жакындаштырылган мааниси алынган:

$$ln2 \approx 0{,}72 \pm 0{,}05.$$

Тагыраак айтканда, $ln2 \approx 0.6931$; демек, чындыгында 0,03 катага жол берилген - (3) формула менен эсептелгенден бир аз кичине.

284. $\int_0^{2\pi} xsinxdx$ тик бурчтуктун формуласын колдонуу менен ($n = 12$), жакындаштырып эсептегиле. Ньютон-Лейбниц формуласынын жардамы менен бул интегралды тапкыла жана натыйжаларды салыштыргыла.

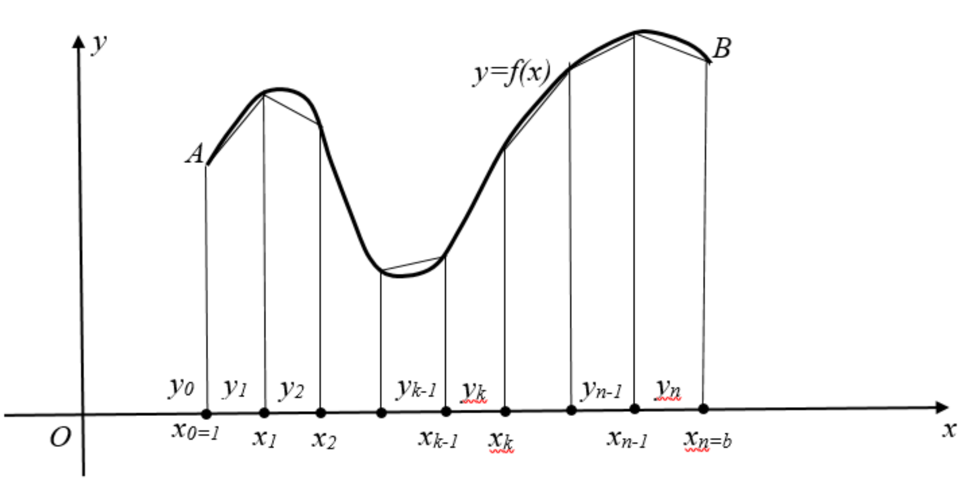
2. Трапеция ыкмасы. Тик бурчтук ыкмасындагыдай эле $[a, b]$ кесиндисин n тең бөлүккө бөлөбүз. Жакындаштырып төмөнкүдөй эсептейбиз

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx \frac{y_{k-1}+y_k}{2} \Delta x_k \quad (4)$$

Бул $aABb$ ийри сызыктуу трапеция бөлүнгөн ар бир тегиздиктин аянты кадимки түз сызыктуу трапециянын аянтына алмаштырылат дегенди билдирет (2-сүрөт).

$k = 1, 2, \dots, n$ үчүн (4) жакындаштырылган барабардыктарды кошуп, трапеция формуласын алабыз.

$$J = \int_a^b f(x)dx \approx S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_{k-1}+y_k}{2} \Delta x_k = \frac{b-a}{2n}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 \dots + 2y_{n-1} + y_n). \quad (5)$$



Сүр. 2

Эгерде $f''(x)$ жашаса жана $[a,b]$ кесиндисинде чектелсе, анда (5) формуласынын δ_n каталыгы төмөнкү барабарсыздык менен бааланат

$$|\delta_n| = |J - S_n| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}, \quad (6)$$

мында M_2– $[a,b]$кесиндисиндеги $f''(x)$ модулдун максимуму.

285. $n = 10$ болгондо трапеция формуласынын жардамы менен $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ интегралын эсептегиле. Үтүрдөн кийинки төрт белги менен эсептегиле. Кетирилген катаны баалагыла. Ушул жана мурунку маселелердин эсептөө тактыгынын даражасын салыштыргыла.

Чыгаруу. [1,2] кесиндисин 10 бирдей бөлүккө бөлөбүз жана тиешелүү бөлүү чекиттеринде $y = \frac{1}{x}$ функциясынын маанилерин эсептейбиз:

Таблица 2

x_k	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
y_k	1,0000	0,9091	0,8333	0,7692	0,7143	0,6667

x_k	1,6	1,7	1,8	1,9	2
y_k	0,6250	0,5882	0,5556	0,5263	0,5000

(5) формулага ылайык эсептейбиз:

$$2\sum_{k=1}^{9} y_k = 12{,}3754, \ \ y_0 + y_{10} = 1.5000$$

жана акыры төмөнкүнү алабыз

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{2-1}{2\cdot 10}(12{,}3754 + 1{,}5000) \approx 0{,}6938.$$

Кетирилген катаны (6) формула аркылуу баалайбыз. $[1,2]$ кесиндисинде $f''(x)=\frac{2}{x^3}$ функциясы монотондуу кемийт, ошондуктан

$$M_2 = \max_{1\le x\le 2}|f''(x)| = f''(1)=2.$$

(6) формула боюнча

$$|\delta_{10}| \le \frac{2(2-1)^2}{12\cdot 10^2} = \frac{1}{600} < 0{,}002.$$

Ошентип, трапеция формуласы боюнча

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = ln2 = 0{,}694 \pm 0{,}002.$$

Бул жана мурунку маселелердеги кетирилген катанын бааларын салыштыруу трапеция формуласы боюнча эсептөө тик бурчтуу формуланы колдонуу менен эсептөөгө салыштырмалуу көбүрөөк тактык даражасын берерин көрсөтөт (ошол эле $n=10$ мааниси үчүн).

286. $\int_1^{10} lg_{10}xdx$ трапеция формуласын колдонуп эсептегиле ($n=10$ деп кабыл алуу менен).

287. $n=8$ болгондо трапеция формуласын колдонуп эсептегиле

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

жана кетирилген катаны баалагыла.

3. Парабола ыкмасы. $[a,b]$ кесиндисин $x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_{2n-2}<x_{2n-1}<x_{2n}=b$ чекиттери менен $2n$ бирдей бөлүккө бөлөбүз жана

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_{2n-1}, y_{2n}$$

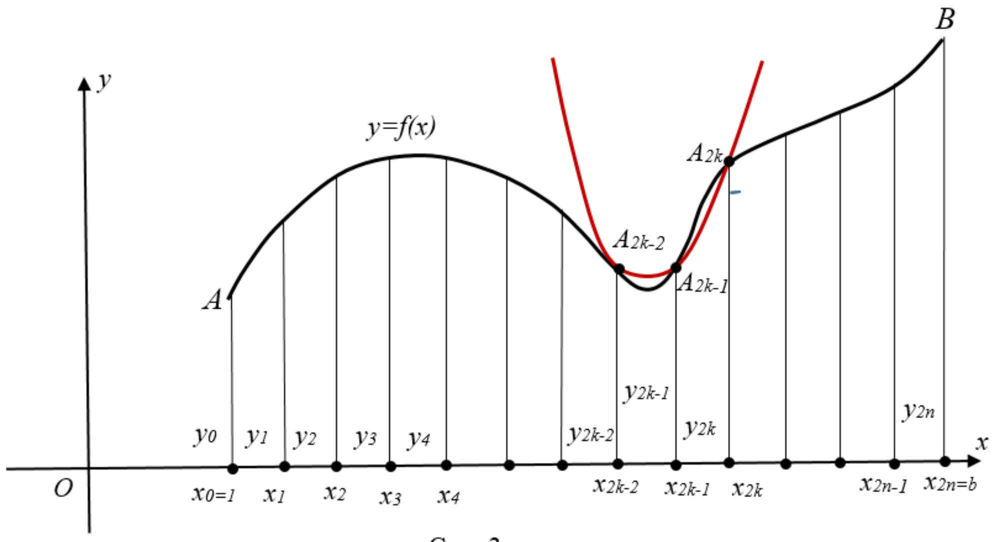
аркылуу $y = f(x)$ функциясынын дал келген маанилерин белгилейбиз. Кош бөлүнгөн сегментти $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ карайбыз жана чекиттер аркылуу парабола жаасын өткөрөбүз

$$(x_{2k-2}, y_{2k-2}), (x_{2k-1}, y_{2k-1}), (x_{2k}, y_{2k}) \quad \text{(сүр. 3)}$$

Ар бир ийри сызыктуу тегиздиктин аянтын $A_{2k-2}, x_{2k-2}, x_{2k}, A_{2k}$ тиешелүү параболикалык тегиздиктин аянты менен алмаштырабыз (жогору жагынан параболанын жаасы менен чектелген тегиздик). Анда бардык ийри сызыктуу трапеция $aABb$ аянтын жакындаштырып эсептөө үчүн төмөнкү формуланы алабыз

$$J = \int_a^b f(x)dx \approx S_{2n} = \frac{b-a}{6n}\sum_{k=1}^{n}(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}) =$$

$$= \frac{b-a}{6n}[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2})], \quad (7)$$



Сүр. 3

Бул параболикалык формула же Симпсон формуласы деп аталат.

Эгерде $f^{(4)}(x) \ = y^4$ жашаса жана $[a, b]$ интервалында чектелсе, анда (7) формуланын катасы үчүн төмөнкү баалоо туура болот:

$$|\delta_n| = |J - S_{2n}| \leq \frac{M_4(b-a)^5}{180(2n)^4}, \qquad (8)$$

мында M_4– $[a, b]$ кесиндисиндеги $f^{(4)}(x)$ модулунун максимуму

288. $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ интегралын *0,0001* тактыгына чейин Симпсондун формуласын колдонуп эсептегиле.

Чыгаруу. Маселенин шарты боюнча кетирилген каталык *0,0001 ден ашпаш керек*, Демек, (7) формуладагы 2n бөлүктөрүнүн санын (8) баасын эсепке алуу менен барабарсыздыктан табабыз.

$$\frac{M_4(b-a)^5}{180(2n)^4} < 0.0001. \qquad (9)$$

e^{-x^2} үчүн $M_4 = \max\limits_{1 \leq x \leq 2}\left|f^{(4)}(x)\right|$ эсептейбиз:

$$f^{(4)}(x) = 4(4x^4 - 12x^2 + 3)e^{-x^2},$$

Бул функция [0,1] кесиндисинде монотондуу түрдө кемий тургандыгын көрүү оңой эле. Чындыгында e^{-x^2} [0,1] кесиндисинде монотондуу кемийт, $0 < x \leq 1$болгондо $(4x^4 - 12x^2 + 3)' = 16x^3 - 24x = 8x(2x^2 - 3)$<0 , демек, $y = 4x^4 - 12x^2 + 3$ функциясы [0,1] кесиндисинде монотондуу кемийт. Демек, $f^{(4)}(x)$ ошол эле касиетке ээ. Анткени ал эки монотондуу кемүүчү функциянын көбөйтүндүсүнөн турактуу боюнча айырмаланат. [0,1] кесиндинин учтарында

$$\left|f^{(4)}(0)\right| = 12, \ \left|f^{(4)}(1)\right| = \left|-\frac{20}{e}\right| < 12.$$

Демек, $M_4 = \max\limits_{1 \leq x \leq 2}\left|f^{(4)}(x)\right| = f^{(4)}(0) = 12.$

$b - a = 1$ жана M_4 маанилерин (9) барабарсыздыгына коюп, төмөнкүдөй барабарсыздык алабыз

$$\frac{12}{180(2n)^4} < 0.0001, \text{ мындан } n^2 > \frac{125}{3}.$$

Акыркы барабарсыздык бардык $n \geq 3$ үчүн орундалат. Эсептөө үчүн $n = 5$ алабыз. [0,1] кесиндисин $x_0 = 0,\ x_1 = 0{,}1,$ $x_2 = 0{,}2, x_3 = 0{,}3, \dots, x_n = 1$ чекиттери менен 10 барабар бөлүктөргө бөлөбүз жана $f(x) = e^{-x^2}$ функциясынын дал келген маанилерин эсептейбиз.

Мында (0,0001) шартта талап кылынган тактыкты камсыз кылуу үчүн акыркы жыйынтыкты төрт белгиге чейин тегеректөө менен үтүрдөн кийин беш белги менен эсептөөлөрдү жүргүзөбүз.

Таблица 3

$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{x_i}$	$\boldsymbol{y_i = f(x_i)}$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{x_i}$	$\boldsymbol{y_i = f(x_i)}$
0	0	1,00000	6	0,6	0,69768
1	0,1	0,99005	7	0,7	0,61263
2	0,2	0,96079	8	0,8	0,52729
3	0,3	0,91393	9	0,9	0,44486
4	0,4	0,85214	10	1,0	0,36788
5	0,5	0,77680			

Эми төмөнкүгө ээ болобуз:

$$y_0 + y_{10} = 1{,}36788,$$

$$4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) = 4 \cdot 3{,}74027 = 14{,}96108,$$

$$2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) = 2 \cdot 3{,}03790 = 6{,}07580.$$

Алынган маанилерди (7) формулага коюп, төмөнкүнү алабыз

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{1{,}36788 + 6{,}07580 + 14{,}96108}{6 \cdot 5} = 0{,}74682$$

$$\approx 0{,}7468.$$

289. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$ экендигин билип, π санын жакындаштырып эсептегиле:

а) $n = 10$ болгондо трапеция формуласы боюнча; б) $n = 2$ болгондо Симпсондун формуласы боюнча . Эсептөө үтүрдөн кийин төрт белги менен чейин жүргүзүлүшү керек. Эсептөөнүн жыйынтыктарын бири-бири менен жана π санынын таблицадагы мааниси менен салыштыргыла.

290. Симпсондун формуласы боюнча эсептегиле $(2n = 10)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x^2)\,dx.$$

291. Симпсондун формуласы боюнча 0,001 тактыкка чейин эсептегиле

$$\int_2^5 \frac{dx}{lnx}.$$

§ 2.4. ӨЗДҮК ЭМЕС ИНТЕГРАЛДАР

1. Чексиз пределдери менен интегралдар. Эгерде $f(x)$ функциясы каалагандай $[a, b]$кесиндисинде, мында $a < b < \infty$, анда

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx. \qquad (1)$$

Эгерде (1) барабардыгынын он жагында предел жашаса $\int_a^{\infty} f(x)dx$ интегралы жыйналуучу деп аталат, эгерде көрсөтүлгөн предел жашабаса интеграл таралуучу деп аталат.

Ушуга окшош эле, эгерде $f(x)$ функциясы каалагандай $[a, b]$ кесиндисинде, мында $-\infty < a < b$, анда

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx. \qquad (2)$$

Аягында, эгерде $f(x)$ сан огунун каалагандай $[a, b]$ кесиндисинде интегралдануучу болсо, анда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} \int_a^b f(x)dx. \qquad (3)$$

Жыйналуучулуктун белгилери

$\int_a^b f(x)dx \quad (a > 0)$: а) жыйналат, эгерде

$$|f(x)| \leq \frac{M}{x^m} \text{ жана } m > 1, \qquad (4)$$

б) таралат, эгерде

$$|f(x)| \geq \frac{M}{x^m} \text{ жана } m \leq 1 \qquad (5)$$

(мында M жана m – турактуулар).

Чексиз пределдүү өздүк эмес интегралдардын аныктамасынын негизинде, интегралдарды эсептегиле (же алардын таралуучулугун тактагыла):

292. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$.

Чыгаруу. (1) аныктаманын негизинде төмөнкүгө ээ болобуз

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1\right) = 1.$$

Демек, интеграл жыйналат.

293. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}$.

Чыгаруу. (2) формуласы боюнча

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} (arct\text{g}\, 0 - arct\text{g}\, a) = \frac{\pi}{2}.$$

294. $\int_a^\infty \frac{dx}{x\ln x} \qquad (a > 1)$.

Чыгаруу. $\int_a^\infty \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to\infty} \int_a^b \frac{d\ln x}{\ln x} = \lim_{b\to\infty} (\ln\ln b - \ln\ln a) = \infty.$

Демек, интеграл таралат.

295. $\int_0^\infty e^{-x} dx$.

296. $\int_1^\infty \frac{arct\text{g}\, x}{1+x^2} dx$.

297. $\int_2^\infty \frac{xdx}{x^2-1}$.

298. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+4x+9}$.

299. $m > 1$ болгондо $\int_a^\infty \frac{dx}{x^m}$ интегралы жыйналарын жана а $m \le 1$ болгондо таралларын далилдегиле.

Өздүк эмес интегралдардын (4) жана (5) белгилерин колдонуп, интегралдар таралларын же жыйналаарын тактагыла:

300. $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^3} dx$.

Чыгаруу. $|\cos x| \leq 1$ болгондуктан, анда $\left|\frac{\cos x}{x^3}\right| \leq \frac{1}{x^3}$, б.а. интеграл астындагы функция . $m = 3 > 1$ жана $M = 1$ болгондо (4) барабарсыздыгын канааттандырат. Демек, интеграл жыйналат.

301. $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$.

Чыгаруу. $x \geq e$ болгондо $\ln x \geq 1$ болгондуктан, анда

$$\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} \geq \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}};$$

демек, $m = \frac{1}{3} < 1$ жана $M = 1$ болгондо интеграл астынадагы функция (5) барабарсыздыгын канааттандырат. Демек, интеграл таралат.

302. $\int_2^{\infty} \frac{3 + arc\sin\frac{1}{x}}{1 + x\sqrt{x}} dx$.

Чыгаруу. $x \geq 2$ болгондо

$$0 < arc\sin\frac{1}{x} \leq arc\sin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} < 1,$$

$$\frac{3 + arc\sin\frac{1}{x}}{1 + x\sqrt{x}} < \frac{4}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

Демек, $m = \frac{3}{2} > 1$ жана $M = 4$ болгондо (4) барабарсыздыгы аткарылат жана интеграл жыйналат.

303. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{2 + \sin x}{x^2} dx$.

306. $\int_1^{\infty} \frac{2 + arc\sin\frac{1}{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$.

304. $\int_2^{\infty}\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. Көрсөтмө. $x \geq 1$ бол-до $arc\sin\frac{1}{x} > 0$ жана $1+\sqrt{x} < 2\sqrt{x}$.

305. $\int_0^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}}$. **307.** $\int_e^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x\ln x+1}}$.

Көрсөтмө. Логарифма каалагандай x тин он даражадан жай өсөт дегенди колдонуш керек.

2. Чектелбеген функциялардын интегралдары. Эгерде $f(x)$ функциясы $a < x \leq b$ болгондо үзгүлтүксүз жана $x = a$ чекитинде чексиз ажырымга ээ болсо, б.а. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, анда

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \quad (\varepsilon > 0). \tag{6}$$

Эгерде (6) барабардыгынын он жагынын предели жашаса $\int_a^b f(x)dx$ интегралы жыйналуучу деп аталат, эгерде предели жашабаса таралуучу деп аталат.

Ушуга окшош эле $[a,b]$ кесиндисинин он учунда чексиз ажырымга ээ болгон функциядан интеграл аныкталат:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \quad (\varepsilon > 0). \tag{7}$$

Эгерде $f(x)$ функциясы $a \leq x < c$ жана $c < x \leq b$ болгондо үзгүлтүксүз жана $x = c$ чекитинде чексиз ажырымга ээ болсо, анда

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \quad (\varepsilon > 0). \tag{8}$$

Эгерде (8) барабардыгынын он жагындагы эки предел жашаса$\int_a^b f(x)dx$ интегралы жыйналуучу деп аталат, жок дегенде бир предели жашабаса таралуучу деп аталат.

Практикада көбүнчө чектелбеген функциялардан өздүк интегралдарынын жыйналуучулугу жөнүндө суроону чечиш үчүн жыйналуучулуктун төмөнкү белгилерин колдонушат:

Эгерде $f(x)$ функциясы интегралдоонун (a, b) интервалынын бир учунда чексиз ажырымга ээ болсо, мисалы $x = a$ чекитинде, анда $\int_a^b f(x)dx$ өздүк эмес интегралы:

а) жыйналат, эгерде

$$|f(x)| \leq \frac{M}{(x-a)^m} \text{ жана } m < 1, \qquad (9)$$

б) таралат, эгерде

$$|f(x)| \geq \frac{M}{(x-a)^m} \text{ жана } m \geq 1 \qquad (10)$$

(мында m жана M турактуулар).

Эгерде $f(x)$ функциясы (a, b) интервалынын $x = c$ ички чекитинде ажырымга ээ болсо, анда интегралды экиге бөлүшөт; a дан c га чейин жана c дан $b - a$ чейин алынган интегралдардын ар бирине жогорудагы белгилерди колдонушат.

Чектелбеген функциялардан өздүк эмес интегралдарынын аныктамасынын негизингде, төмөнкү интегралдарды эсептегиле (же алардын таралуучулугун тактагыла):

308. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Чыгаруу. $\frac{1}{\sqrt{x}}$ функциясы $0 < x \leq 1$ болгондо үзгүлтүксүз жана $x = 0$ чекитинде чексиз ажырымга ээ, ошондуктан (6) барабардыгынын негизинде ээ болобуз

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(2 - 2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2.$$

Демек, интеграл жыйналат жана 2 ге барабар.

309. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Чыгаруу. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ функциясы $0 \leq x < 1$ болгондо үзгүлтүксүз жана $x = 1$ чекитинде чексиз ажырымга ээ, ошондуктан (7) барабардыгынын негизинде ээ болобуз

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(arc\sin x\big|_0^{1-\varepsilon}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}[arc\sin(1-\varepsilon) - arc\sin 0] = \lim_{\varepsilon\to 0} arc\sin(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2}.$$

Интеграл жыйналат жана $\frac{\pi}{2}$ ге барабар.

310. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} ctg\, x dx$.

311. $\int_{0,5}^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

312. $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

313. $\int_3^6 \frac{dx}{x^2-7x+10}$.

314. $m < 1$ болгондо $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^m}$ $(m > 0)$ интегралы жыйналарын жана а $m \geq 1$ болгондо тараларын далилдегиле.

Өздүк эмес интегралдардын (9) жана (10) белгилерин колдонуп, интегралдар тараларын же жыйналаарын тактагыла:

315. $\int_1^3 \frac{2+\cos x}{(x-1)^2} dx$.

Чыгаруу. $\frac{2+\cos x}{(x-1)^2}$ функциясы $x = 1$ чекитинде чексиз ажырымга ээ, x тин каалагандай маанисинде $2 + \cos x \geq 1$, ошондуктан

$$\frac{2 + \cos x}{(x-1)^2} \geq \frac{1}{(x-1)^2}$$

(10) белгиси боюнча $m = 2$ жана $M = 1$ болгондо интеграл таралат.

316. $\int_3^6 \frac{(x+2)dx}{\sqrt[3]{(x^2+2x-15)^2}}$.

Чыгаруу.

$\frac{(x+2)dx}{\sqrt[3]{(x^2+2x-15)^2}} = \frac{x+2}{\sqrt[3]{(x-3)^2(x+5)^2}}$ интеграл астындагы функция $x = 3$ чекитинде ажырымга ээ. $3 \leq x \leq 6\,, x + 2 \leq 8, x + 5 \geq 8$ жана демек,

$$\frac{x+2}{\sqrt[3]{(x-3)^2(x+5)^2}} \leq \frac{2}{(x-3)^{2/3}},$$

б.а. $m = \frac{2}{3} < 1$ жана $M = 2$ болгондо (9) барабарсыздыгы канаатандырылат. Демек, интеграл жыйналат.

317. $\int_0^\pi \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$.

319. $\int_2^3 \frac{dx}{x^2-4x+3}$.

318. $\int_{e}^{e^2} \frac{x \ln x}{(x-e)^3} dx$.

320. $\int_{0,5}^{1} \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

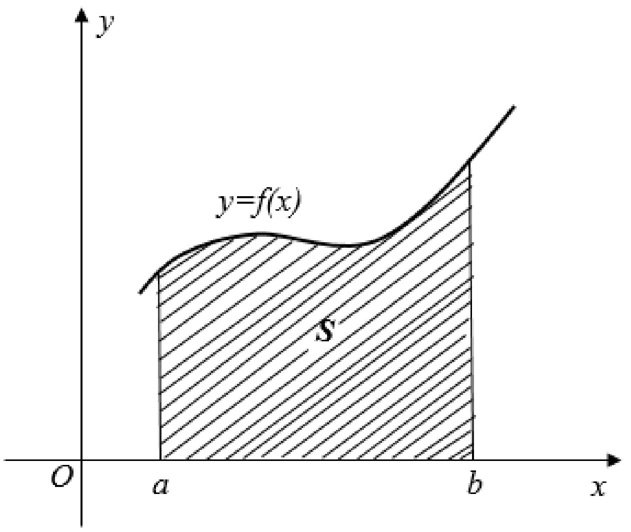
§ 2.5. ЖАЛПАК ФИГУРАЛАРДЫН АЯНТТАРЫ

1. Тик бурчтуу координаталарда аянттарды эсесптөө. Эгерде үзгүлтүксүз ийри төмөнкүдөй теңдеме менен берилсе

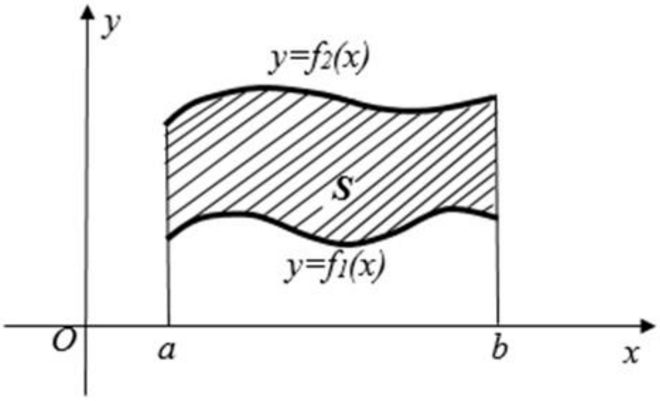
$$y = f(x) \quad (f(x) \geq 0),$$

анда бул ийри менен $x = a$ жана $x = b$ чекиттеринде эки вертикалдуу жана $a \leq x \leq b$ абсцисса огунун кесиндиси менен чектелген ийри сызыктуу трапециянын аянты төмөндөгүдөй формула менен эсептелет.

$$S = \int_{a}^{b} f(x) dx, \qquad (1)$$



Сур. 4



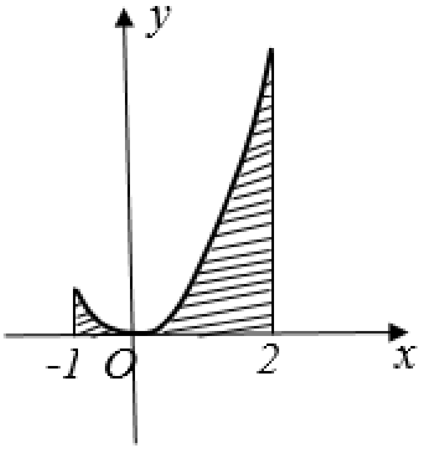
Сүр. 5

Эгерде S аянты эки үзгүлтүксүз ийри менен чектелген болсо

$$y = f_1(x) \text{ жана } y = f_2(x)$$

эки вертикалдар $x = a, x = b$ мында $f_1(x) \leq f_2(x)$ $a \leq x \leq b$ болгондо (сүр.6), анда

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx. \qquad (2)$$



Сүр. 6

Ийринин параметрдик түрдө берилген учурунда

$$x = \varphi(t), y = \psi(t),$$

бул ийри менен, $x = a$ жана $x = b$ эки вертикалдары менен жана $a \leq x \leq b$ абсцисса огунун кесиндиси менен чектелген ийри сызыктуу трапециянын аянты, төмөнкү интеграл менен туюнтулат

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\varphi'(t)dt, \qquad (3)$$

мында t_1 жана t_2 $a=\varphi(t_1)$ жана $b=\varphi(t_2)$ теңдемелеринен аныкталат ($[t_1,t_2]$ кесиндисинде $\psi(t)\geq 0$).

321. $y=x^2$ параболасы, $x=-1$ жана $x=2$ түз сызыктары жана абсцисса огу менен чектелген аянтты эсептегиле (Сүр.6).

Чыгаруу. Изделүүчү аянт (1) формуласы менен эсептелет:

$$S=\int_{-1}^{2}x^2dx=\frac{x^3}{3}\bigg|_{-1}^{2}=3.$$

322. $y=2x-x^2$ параболасынын $y=-x$ түз сызыгы менен кесилишкенде пайда болгон сегменттин аянтын эсептегиле.

Чыгаруу. Толук квадратты бөлүп алуу ыкмасы менен параболанын теңдемесин төмөнкүдөй түргө алып келебиз

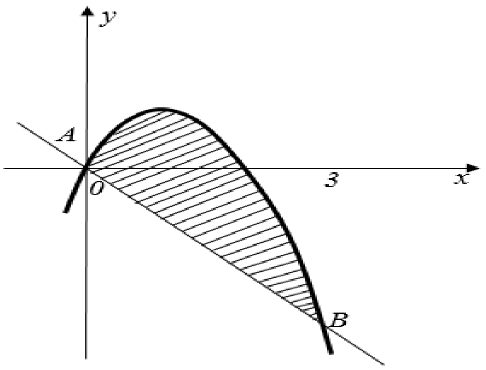
$$y-1=-(x-1)^2;$$

мындан парабола $x=1$ түз сызыгына салыштырмалуу симметриялуу, бутактары төмөн караган жана анын чокулары (1,1) чекитинде жатаары көрүнүп турат. Параболанын теңдемеси $y=2x-x^2$ жана $y=-x$ түз сызыгынын теңдемелерин биргелешип чыгарып A жана B чекиттеринин абсциссаларын аныктайбыз: $x_A=0, x_B=3$.

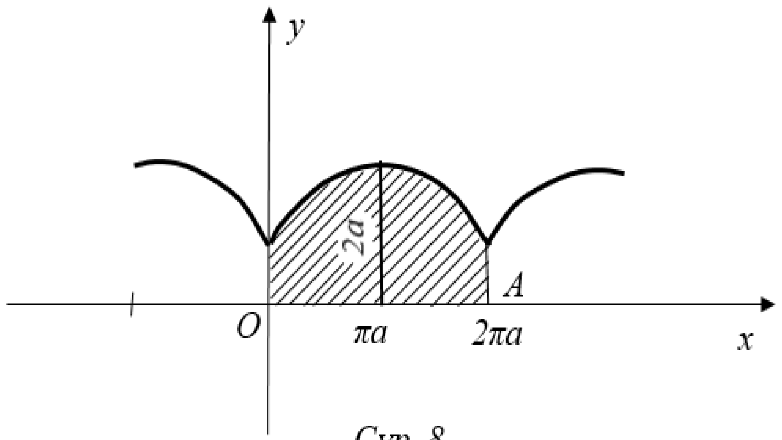
Эми (2) формуласы боюнча $f_1(x)=-x, f_2(x)=2x-x^2, a=0, b=3$ болгондо сегменттин изделүүчү аянтын эсептейбиз:

$$S=\int_0^3[(2x-x^2)-(-x)]dx=\int_0^3(3x-x^2)dx=$$

$$=\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\bigg|_0^3 1-\cos t=\frac{9}{2}.$$



Сүр. 7



Сүр. 8

323. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ циклоидтын биринчи аркасы жана абсцисса огунун кесиндилери менен чектелген фигуранын аянтын тапкыла (сүр.8).

Чыгаруу. O жана A чекиттерине $t_0 = 0$ жана $t_A = 2\pi$ параметрлеринин маанилери дал келет, ошондуктан (3) формуласы боюнча изделүүчү аянт

$$S = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)[a(t - \sin t)]' dt = \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt =$$

$$= a^2 \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

324. $y = \sin x$ синусоиданын бир жарым толкуну жана Ox огу менен чектелген аянтты эсептегиле.

325.. $y = 4x - x^2$ параболасы жана Ox огу менен чектелген аянтты эсептегиле.

326. $y = e^x, y = e^{-x}$ ийрилери жана $x = 1$ түз сызыгы менен чектелген аянтты тапкыла.

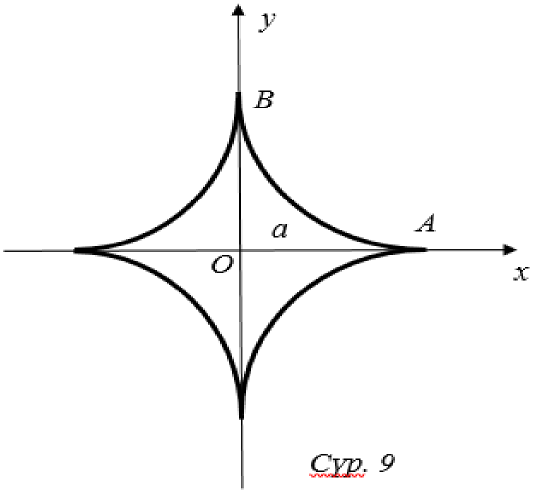
327. $y = \ln x$ жана $y = \ln^2 x$ сызыктарынын арасына камалган аянтты эсептегиле.

328. $y^2 = 2px$ жана $x^2 = 2py$ параболалары менен чектелген аянтты тапкыла.

329. $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 8 = 0$ айланасы жана $y = x^2 + 6x + 10$ параболасы менен чектелген ар бир фигурадан аянтты тапкыла.

330. $x = a\cos t, y = b\sin t$ параметрдик тедемелерин колдонуп, эллипстин аянтын тапкыла.

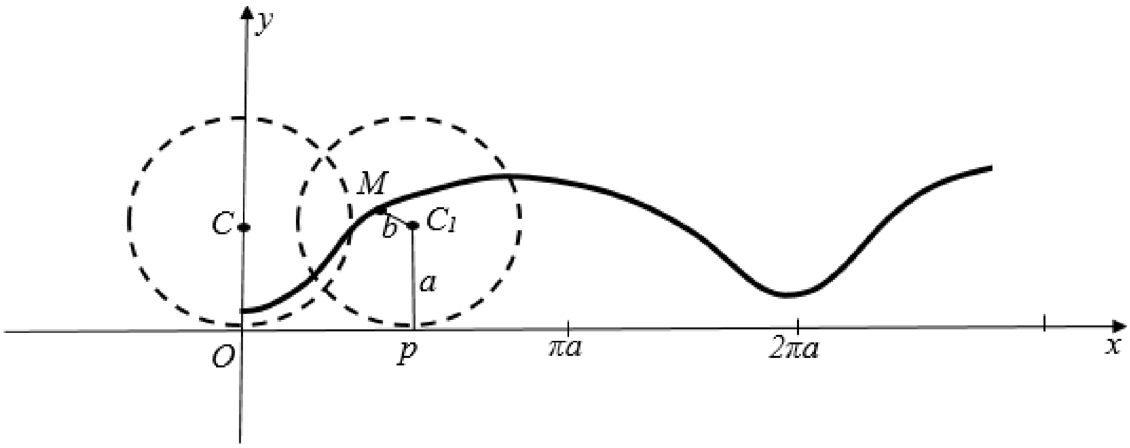
331. $x = a\,cos^3\,t, y = a\,sin^3\,t$ астроидт менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле.



Сүр. 9

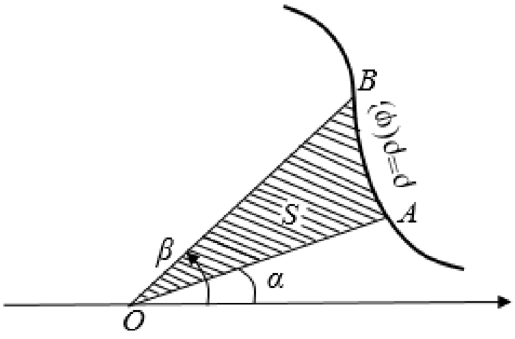
Көрсөтмө. Биринчи квадрантта жаткан, изделүүчү аянттын чейрегин эсептөө үчүн $t_1 = \frac{\pi}{2}$ ал эми $t_2 = 0$ экендигин эске алуу керек.

332. Трохоиданын бир жаасы $x = at - b\sin t, y = a - b\cos t$ $(0 < b < a)$ менен трохоиданын жанаша төмөнкү эки чекиттери аркылуу өткөн вертикалдуу түз сызыктар жана Ox огу менен чектелген аянтты эсептегиле. (сүр.10).



Сүр. 10

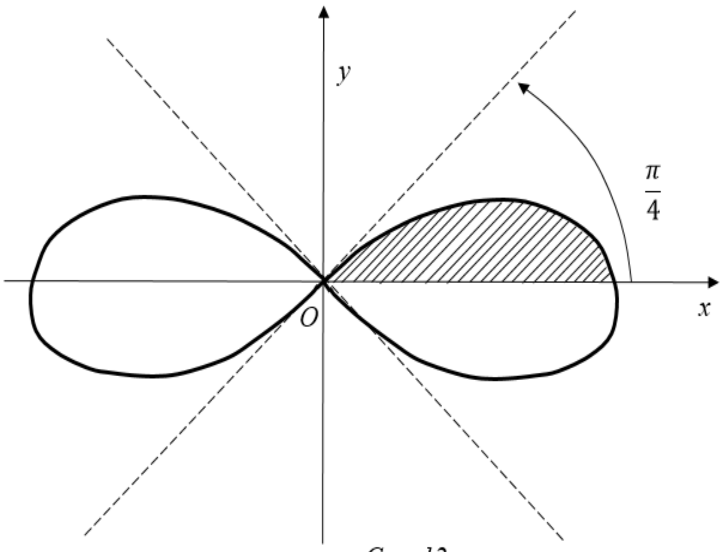
2. Полярдык координаталарда аянттарды эсептөө. Эгерде ийри $\rho = \rho(\varphi)$ полярдык координаталарда берилсе, бурчтун тиешелүү $\varphi_1 = \alpha$ жана $\varphi_2 = \beta$ $(\alpha < \beta)$ маанилеринде, ийринин жаасы жана OA жана OB эки полярдык радиустар менен чектелсе, анда AOB секторунун аянты (сүр.11), төмөнкү интеграл менен туюнтулат



Сүр. 11

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [\rho(\varphi)]^2 d\varphi. \qquad (4)$$

333. $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ Бернуллинин жалбырактарынын ичинде камалган аянтты тапкыла (сүр.12).

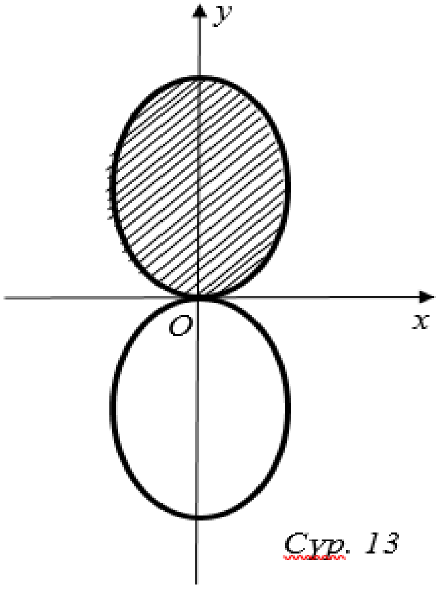


Сүр. 12

Чыгаруу. Симметриянын күчүнө ылайык изделүүчү аянттын бир чейрегин эсептөө жетиштүү, андан кийин жыйынтыкты төрт эсе эсептейбиз. (4) формуласы боюнча төмөнкүгө ээ болобуз

$$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi \, d\varphi = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{2},$$

мындан $S = a^2$.



Сүр. 13

334. $\rho = 4sin^2\varphi$ ийрисинин бир жалбырагынын аянтын тапкыла (сүр.13).

Чыгаруу. Эгерде φ полярдык бурч $\varphi = 0$ дөн $\varphi = \pi$ ге чейин өзгөрсө, анда ийридеги чекит бир жалбыракты саат жебесине каршы айланып өтөт; ошондуктан (4) формула боюнча изделүүчү аянт үчүн төмөнкүгө ээ болобуз

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} 16\,sin\,^2\varphi d\varphi =$$

$$= 8\int_0^{\pi} \left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi$$

$$= 2\int_0^{\pi} (1 - 2\cos 2\varphi + cos^2 2\varphi)\, d\varphi == 2\,(\varphi - \sin 2\varphi)|_0^{\pi}$$

$$+ 2\int_0^{\pi} \frac{1+\cos 4\varphi}{2} d\varphi = 2\pi + \left(\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\Big|_0^{\pi} = 3\pi.$$

335. $\rho = a(1+\cos\varphi)$ кардиоидо менен чектелген аянтты эсептегиле.

336. $\rho = 2 + \cos\varphi$ Паскалдын үлүлү менен чектелген аянтты тапкыла.

337. $\rho = a\varphi$ архимедтик спираль үчүн биринчи айлануу учурунда радиус-вектору менен сүрөттөлгөн аянт биринчи айлануунун аягындагы радиус векторунун маанисине барабар радиусу бар айлананын аянтынан 4 эсе чоң экенин көрсөткүлө. Биринчи жана экинчи спиралдын бурулуштарынын арасында кармалган аянтты тапкыла.

338. $\rho = a\,\cos 3\varphi$ үч жалбырактуу роза менен чектелген аянтты тапкыла.

§ 2.6. БАШКА ГЕОМЕТРИЯЛЫК КОЛДОНУШТАР

1. **Жаанын узундугу.** Эгерде ийри сызык $x = x(t), y = y(t)$ параметрдик теңдемелер аркылуу берилсе, анда анын жаасынын узундугу

2. $$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \mathrm{dt}, \quad (1)$$

формула боюнча эсептелет, мында t_1 жана t_2 $(t_1 < t_2)$ жаанын учтарына туура келген параметр маанилери.

Эгерде ийри сызык $y = f(x)$ же $x = \mathrm{g}(y)$ түрдөгү теңдеме менен берилсе,анда (1) формуланын ордуна тиешелүүлүгүнө жараша x же y параметрин алып,

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx, \quad (2)$$

алабыз, мында a жана b $(a < b)$ жаа башынын жана аягынын абсциссалары, же

$$s = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy, \quad (3)$$

мында c жана $d\,(c < d)$ жаа башынын жана аягынын ординаталары.

Эгерде, акырында, ийри

$$\rho = \rho(\varphi)$$

полярдык координаттардагы теңдеме менен берилсе, анда φ бурчун параметр катары алып, $x = \rho(\varphi)cos\varphi,$ $y = \rho(\varphi)sin\varphi$ экенин эске алып, (1) ге алмаштыргандан кийин

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi, \qquad (4)$$

алабыз, мында α жана β $(\alpha < \beta)$ жаанын учтарына туура келген полярдык бурчтун маанилери.

339. $x = acos^3t,\ y = asin^3t$ астроиддин узундугун эсептегиле.

Чыгаруу. Ийри сызык эки координат огуна салыштырмалуу симметриялуу (9-сүрөттү караңыз), андыктан алгач анын биринчи квадрантта жайгашкан төртүнчү бөлүгүнүн узундугун эсептейбиз:

$$\frac{dx}{dt} = -3acos^2tsint,\ \ \frac{dy}{dt} = -3asin^2tcost.$$

t параметри $t = 0$ дөн $t = \frac{\pi}{2}$ ге өзгөрөт. Демек, (1) формула боюнча бизде

$$\frac{1}{4}s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2cos^4tsin^2t + 9a^2sin^4tcos^2t}\mathrm{dt} =$$

$$= 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{cos^2tsin^2t}\, dt = 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} sintcostdt = 3a\frac{sin^2t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}a;$$

$$s = 6a.$$

340. $y = \sqrt{x^3}$ жарым куб параболанын координаталар башталышынан $\mathrm{B}(4, 8)$ чекитине чейинки жаанын узундугун эсептегиле.

Ч ы г а р у у. $\frac{dy}{dx}$ таап, (2) формулага алмаштырып

$$s=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{4}{9}\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,d\left(1+\frac{9}{4}x\right)$$

$$=\frac{4}{9}\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4=\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$$

алабыз

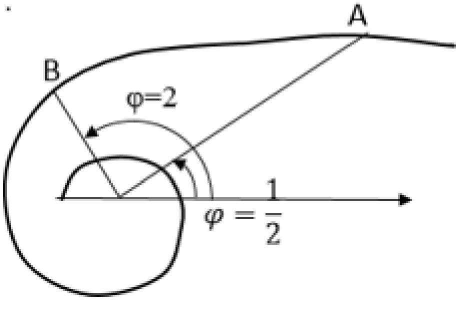
341. $y=1$ ден $y=e$ ге чейин $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}lny$ ийри сызыктын жаасынын узундугун тапкыла.

Ч ы г а р у у. Ийри сызыктын теңдемеси xга карата чечилет, андыктан жаанын узундугун эсептөө үчүн (3) формуланы колдонобуз:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{y^2-1}{2y},\qquad \sqrt{1+\left(\frac{dx}{de}\right)^2}=\frac{y^2+1}{2y};$$

$$s=\int_1^e\frac{y^2+1}{2y}dy=\frac{1}{2}\int_1^e\left(y+\frac{1}{y}\right)dy=\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2}+lny\right)\Big|_1^e=\frac{e^2+1}{4}.$$

342. A$(2,1/2)$ чекиттен B$(1/2,2)$ чекитине чейинки $\rho\varphi=1$ гиперболалык спиралдын жаасынын узундугун тапкыла (14-сүрөт).



Сүр. 14

Ч ы г а р у у. ρ га карата спиралдык теңдемени чыгарабыз: $\rho=\frac{1}{\varphi}$. $\varphi\to+\infty$ болгондуктан, спиралдын радиус-вектору чексиз кичирейет жана спиралдын бурулуштары уюлга чексиз жакындайт. Бизди $\varphi=\frac{1}{2}$ ден $\varphi=2$ ге чейинки полярдык бурчтун

маанилерине туура келген спиралдын AB жаасынын узундугу кызыктырат. $\frac{d\rho}{d\varphi} = -\frac{1}{\varphi^2}$ спиралдык теңдемеден жана (4) формула боюнча керектүү узундук табылат:

$$s = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \sqrt{\frac{1}{\varphi^2} + \left(-\frac{1}{\varphi^2}\right)^2}\, d\varphi = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \sqrt{1 + \frac{1}{\varphi^2}} \frac{1}{\varphi}\, d\varphi.$$

$$\sqrt{1 + \frac{1}{\varphi^2}} = z$$

коюу менен өзгөрмөнүн өзгөрүшүн жасайлы, анда

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}},\ d\varphi = \frac{zdz}{(z^2-1)\sqrt{z^2-1}}.$$

Жаңы интегралдоонун чектөөлөрү:

$$z|_{\varphi=\frac{1}{2}} = \sqrt{5},\quad z|_{\varphi=2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Ошентип,

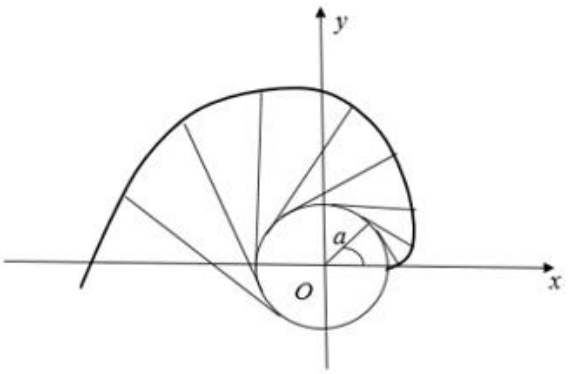
$$s = \int_{\sqrt{5}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}} z\sqrt{z^2-1} \frac{-zdz}{(z^2-1)\sqrt{z^2-1}}$$

$$= \int_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^{\sqrt{5}} \frac{z^2 dz}{z^2-1} = \int_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^{\sqrt{5}} \left(1 + \frac{1}{z^2-1}\right) dz =$$

$$= \left(z + \frac{1}{2} ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\right)\Big|_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} ln\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2} + ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

343. Циклоиддин бир аркасынын узундугун тапкыла (8-сүрөттү караңыз).

$$x = a(t - sint),\ y = a(1 - cost).$$



Сур. 15

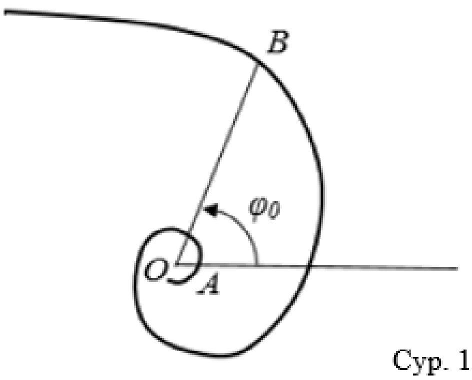
344. $t_1 = 0$ дөн $t_2 = T$ га чейин айлананын жаасынын узундугун тапкыла (15-сүрөт).

$x = a(cost + tsint),$

$y = a(sint - cost)$

345. $x = \sqrt{3}$ дөн $x = \sqrt{8}$ чейин $y = lnx$ ийри сызыктын жаасынын узундугун тапкыла.

346. $y = 0$ жана $y = \frac{\pi}{3}$ ортосунда жайгашкан $x = lncosy$ ийри сызыгынын жаасынын узундугун эсептегиле.



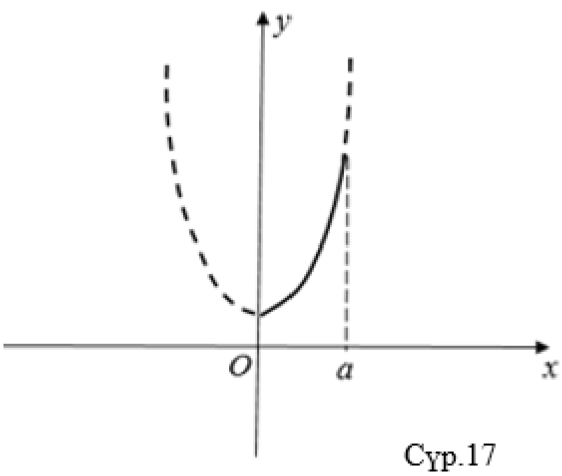
Сур. 16

347. $\rho = a\varphi$ Архимед спиралынын биринчи эки бурулушунун узундугун тапкыла.

348. $\varphi = 0$ дөн $\varphi = \varphi_0$чейин $\rho = ae^{\varphi}$ логарифмалык спиралдын жаасынын узундугун эсептегиле (16-сүрөт).

349. $\rho = a(1 + cos\varphi)$ кардиоиддин бүт узундугун тапкыла.

350. Учтары $x = 0$ жана $x = a$ абсциссалары болгон $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ чынжыр сызыгынын жаасынын узундугун тапкыла (17 – сүрөт).



Сүр.17

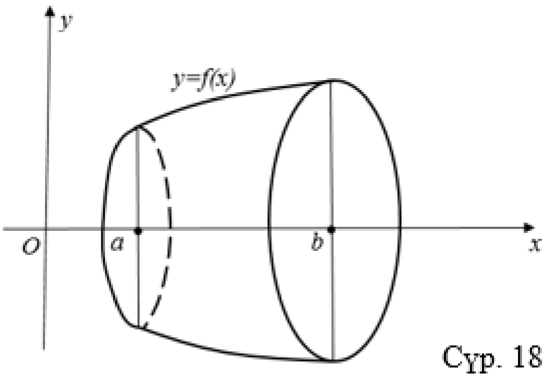
Көрсөтмө: Сызыктын теңдемесин $y = ach\frac{x}{a}$ түрүндө жазгыла, анда $\frac{dy}{dx} = sh\frac{x}{a}$. Интеграциялоодо $ch^2\alpha - sh^2\alpha = 1$ формуласын колдонгула.

351. $t_1 = 0$ дөн $t_2 = \pi$ чейин $x = (t^2 - 2)sint + 2tcost, \quad y = (2 - t^2)cost + 2tsint$ сызыктын жаасынын узундугун эсептегиле.

2. Айлануу телонун көлөмү. $y = f(x)$ ийри сызыгы, абсцисса огу $a \le x \le b$ сегменти жана эки вертикал $x = a$ жана $x = b$ менен чектелген ийри сызыктуу трапециянын Ox огунун айланасында айланууда пайда болгон телонун көлөмү (18 – сүрөт) төмөнкү формуласы боюнча эсептелет

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (5)$$

$x = \varphi$(y) ийри сызыгы, ординат огунун $c \le y \le d$ кесиндиси жана эки параллелдер $y = c$ жана $y = d$ менен чектелген фигуранын Oy огунун айланасында айланууда пайда болгон телонун көлөмү төмөндөгү формула боюнча эсептелет:



Сүр. 18

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy. \quad (6)$$

352. $y = x^2$ параболасы, Oy огу жана y = 1 түз сызыгы менен

чектелген фигуранын Oy огунун айланасында айланууда пайда болгон телонун көлөмүн тапкыла.

Ч ы г а р у у. (6) формуланы колдонуп, $c = 0$, $d = 1, x^2dy = ydy$ экендигин эске алып

$$V_y = \pi \int_0^1 ydy = \pi \frac{y^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

алабыз.

353. $a(t - sint), y = a(1 - cost)$ циклоидинин бир аркасынын Ox огунун айланасында айланууда пайда болгон телонун көлөмүн тапкыла (8-сүрөттү караңыз).

Ч ы г а р у у. Маанилерди формулага (5) коебуз

$$y^2 = a^2(1 - cost)^2 \text{ и } dx = a(1 - cost)dt.$$

Интегралдоонун жаңы чектерине (t боюнча) өтөбүз. Циклоиддин биринчи аркасына t–параметринин $t_1 = 0$ дөн $t_1 = 2\pi$ ге өзгөрүшүнө дал келет, ошондуктан изделүүчү көлөм үчүн

$$V_x = \pi \int_0^{2\pi} a^3(1 - cost)^3dt$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3cost + 3cos^2t - cos^3t)dt =$$

$$= \pi a^3 \left(\frac{5}{2}t - 4sint + \frac{3}{4}sin2t + \frac{1}{3}sin^3t\right)\bigg|_0^{2\pi} = 5\pi^2a^3$$

алабыз.

354. $y = sinx$ $(0 \le x \le \pi)$ синусоиданын бир жарым толкунунун $0x$ *огунун* айланасында айланууда пайда болгон телонун көлөмүн эсептегиле.

355. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, y = b, y = -b$ сызыктары менен чектелген фигуранын Oy огунун айланасында айланууда пайда болгон телонун көлөмүн аныктагыла.

356. $y = x^3$ кубдук параболасы ордината огунун айланасында айланат. Натыйжадагы айлануу бети жана ордината огуна перпендикуляр болгон жана баш басынан сегиз бирдикке барабар аралыкта жайгашкан эки тегиздик менен чектелген телонун көлөмүн эсептегиле.

357. $x = acos^3t, y = asin^3t$ астроиддин Oy огунун айланасында айланууда пайда болгон телонун көлөмүн тапкыла (9-сүрөттү карагыла).

3. Айлануу бетинин аянты. Эгерде ийри сызык

$$x = x(t), y = y(t)\ [y(t)\ \geq\ 0],$$

параметрдик теңдемелер аркылуу берилсе, анда бул ийри сызыктын жаасынын Ox огунун айланасында айлануусунан пайда болгон беттин аянты

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt, \qquad (7)$$

формула боюнча эсептелет. Мында t_1 жана t_2 $(t_1 < t_2)$ – жаанын учтарына туура келген t параметринин маанилери.

Эгерде ийри сызык

$$y = f(x),$$

формадагы теңдеме менен берилсе, анда (7) формуланын ордуна x параметрин алып

$$S = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx, \qquad (8)$$

алабыз, мында a жана b $(a < b)$ жаанын башынын жана аягынын абсциссалары.

358. Айланма жааны $x^2 + y^2 = 4$ $(y > 0)$ Ox огунун айланасында абсциссалары $x = -1, x = 1$ болгон чекиттердин ортосунда айлантуудан алынган сфералык тилкенин аянтын эсептегиле.

Ч ы г а р у у. $y(x) = \sqrt{4 - x^2}$ болгон (8) формуласына ылайык интегралдык туюнтманы түзөлү:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}, \quad y(x)\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 2,$$

жана

$$S = 2\pi \int_{-1}^{1} 2dx = 8\pi$$

алабыз.

359. $x = acos^3t, y = asin^3t$ астроиддин абсцисса огунун айланасында айлануудан пайда болгон беттин аянтын тапкыла (9-сүрөттү карагыла).

Ч ы г а р у у. (7) формулага ылайык интегралдык туюнтманы түзөбүз:

$$\frac{dx}{dt} = -3acos^2tsint, \qquad \frac{dy}{dt} = 3asin^2tcost;$$

$$y(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = asin^3t\sqrt{9a^2(cos^4tsin^2t + sin^4tcos^2t)}$$

$$= 3a^2sin^4tcost.$$

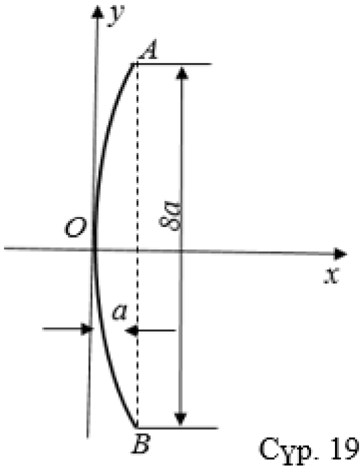
t параметринин $t = 0$ дөн $t = \pi/2$ ге чейин өзгөрүшү астроид боюнча A дан B га чейин чекиттин кыймылына туура келет. AB жаасы абсцисса огунун айланасында айланганда, керектүү аймактын жарымын "шыпырып алат", ошондуктан

$$\frac{S}{2} = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a^2 sin^4 t cost dt = 6\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4 t dsint = 6\pi a^2 \frac{sin^5 t}{5}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{6}{5}\pi a^2;$$

$$S = \frac{12}{5}\pi a^2.$$

360. AOB параболикалык күзгүсүнүн өлчөмдөрү 19 – сүрөттө көрсөтүлгөн. 162. Бул күзгүнүн бетин табуу талап кылынат.



Сүр. 19

361. $y = sinx$ синусоиданын бир жарым толкунунун Ox огунун айланасында айлануусунун натыйжасында алынган «шпиндельдин» бетинин аянтын тапкыла.

362. $x = acost, y = bsint$ $(a > b)$ эллипстин Ox огунун айланасында айланууда пайда болгон беттин аянтын тапкыла.

363. $x = a(t - sint), y = a(1 - cost)$ циклоиданын бир аркасынын айлануусунан пайда болгон телонун бетинин аянтын тапкыла (8-сүрөттү карагыла).

364. Учтары $x = 0$ жана $x = a$ абсциссалары бар $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ чынжыр сызыгынын жаасы Ox огунун айланасында айланат

(17-сүрөттү карагыла). Бул учурда пайда болгон телонун бетинин S аянты жана V көлөмү

$$S = \frac{2}{a}\text{V}$$

катыш менен байланышта экендигин көрсөткүлө.

§ 2.7. МЕХАНИКАЛЫК ЖАНА ФИЗИКАЛЫК КОЛДОНУЛУШТАРЫ

1. Аныкталган интегралдын колдонуунун жалпы схемасы. Берилген $[a, b]$ кесиндиде белгилүү бир мааниге ээ болгон кандайдыр бир механикалык жана физикалык Q чоңдугун табуу зарыл болсун. Q аддитивдүү чоңдук деп болжолдонууда, б.а. эгерде $[a, b]$ кесиндиси бөлүктөргө бөлүнсө, анда Q чоңдук бул бөлүктөргө туура келген Q маанилеринин суммасы болуп саналат. Маселенин шартынан $dQ = q(x)dx$ түрүндөгү $[x, x + dx]$ «элементардык интервалга» жооп берген Q чоңдуктун dQ«элементи» табылат. Андан кийин $[a, b]$ интервалында интегралдап

$$Q = \int_a^b q(x)dx$$

чоңдукту алабыз.

2. Чекит басып өткөн аралык. Чекит t убакыттын белгилүү функциясы болгон v өзгөрмө ылдамдыгы менен түз сызык боюнча жылсын: $v = f(t)$. t_1 убакыттан t_2 убакытка чейинки чекиттин басып өткөн аралыгын аныктоо талап кылынат.

$[t, t+dt]$ элементардык убакыт аралыгын алалы. Бул убакыттын ичинде чекит

$$dS = vdt = f(t)dt$$

аралыкты басып өтөт. Бул аралыктын "элементи" болуп саналат. $[t_1, t_2]$ кесиндиси боюнча интегралдап, $[t_1, t_2]$ убакыт ичинде чекит басып өткөн аралыктын маанисин алабыз:

$$S= \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt. \qquad (1)$$

365. Чекиттин кыймылынын ылдамдыгы

$$v = \sqrt{1+t} \text{ м/сек.}$$

формуласы менен берилет. Кыймыл башталгандан баштап биринчи *10* секундада чекит басып өткөн аралыкты тапкыла. Бул убакыт аралыгындагы кыймылдын орточо ылдамдыгы канчага барабар?

Ч ы г а р у у. *10* секундда чекиттин басып өткөн аралык (1) формула боюнча эсептелет:

$$S= \int_0^{10} \sqrt{1+t}dt = \frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{10} = \frac{2}{3}\left(11\sqrt{11}-1\right) \approx 23{,}7 \text{ м};$$

$$v_{\text{ср}} = \frac{S}{10} = \frac{11\sqrt{11}-1}{15} \approx 2{,}37 \text{м/сек}\,.$$

366. Кыймылдын биринчи *T* секундасында боштукта эркин түшкөн телонун басып өткөн аралыгын эсептегиле, эгерде боштукта эркин түшүү ылдамдыгы $v = v_0 + gt,$ экендиги белгилүү болсо, мында t - өткөн убакыт, g - тартылуу күчүнүн ылдамдануусу, v_0 – баштапкы ылдамдык.

367. Чекит $v = v_0\, cos\omega t$ ылдамдыгы менен координаталардын башалышына жакын *Ox* огу боюнча

гармониялык термелүүнү жүзөгө ашырат. Эгерде t_1 убакытта ал $x = x_1$ чекитинде болгону белгилүү болсо, t_2 убакыттагы чекиттин абалын тапкыла.

3. Күчтүн жумушу. Материалдык чекит $F = F(x)$ өзгөрмө күчтүн таасири менен Ox огу боюнча $x = a$ чекиттен $x = b$ $(a < b)$ чекитине жылсын жана күчтүн багыты кыймылдын багыты менен дал келсин. Бул болмодо күчтүн аткарган жумушун тапкыла. $[x, x + dx]$ элементардык жылышууну алалы. Бул кыймыл боюнча күч тарабынан жасалган жумушу

$$dA = F(x)dx.$$

Биз жумуштун «элементин» алдык. Эми $[a, b]$ кесиндиси боюнча интегралдап, изделүүчү жумушту алабыз:

$$A = \int_a^b F(x)\,dx. \qquad (2)$$

368. Массасы m болгон телону жердин бетинен h бийиктикке көтөрүү үчүн канча жумуш жумшалышы керек? Телону чексиздикке чейин алып салуусу керек болсо, бул жумуш эмнеге барабар?

Ч ы г а р у у. Телону жер бетинен көтөргөндө жумушту жаратуучу Fкүчтүн чоңдугу телонун жердин тартылуу күчүнүн чоңдугуна барабар, б.а.

$$F(r) = k\frac{mM}{r^2},$$

мында m– телонун массасы, M– Жердин массасы, r – телодон Жердин борборуна чейинки аралык, k – туруктуу коэффициент. Күч Жердин борборунан радиусу бою нча багытталган. Ошол эле багытта тело $r_1 = R$ абалынан (R - Жердин радиусу) $r_2 = R +$

h абалына өтөт. (2) интегралынын жардамы менен $[R, R + h]$ жолунда $F(r)$күчтүн жумушун эсептейбиз:

$$A = \int_R^{R+h} k\frac{mM}{r^2}dr = kmM\int_R^{R+h}\frac{dr}{r^2} = kmM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right).$$

Жердин бетинде ($r = R$ де) тартылуу күчү $F = mg$ экенин эске алып, k коэффициентин табабыз:

$$mg = k\frac{mM}{R^2}, \text{ откуда } k = \frac{gR^2}{M}.$$

Ал эми биз издеп жаткан жумуш үчүн жыйынтыгында

$$A = mgR^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)$$

алабыз.

Телону чексиздикке жылдырганда

$$\lim_{h\to\infty} A = mgR^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) = mgR$$

болот, же

$$A_\infty = mgR.$$

369. Эки электр заряды $e_1 = \frac{1}{3}10^{-7}$к жана $e_2 = \frac{2}{3}10^{-7}$к бири-биринен *10 см* аралыкта жайгашкан. Алардын ортосундагы бөлүүчү чөйрө парафин болуп саналат. Адегенде эки заряд тең кыймылсыз бекитилет. Андан кийин e_2 заряды бошотулуп, түртүүчү күчтүн таасири астында e_1зарядынан *1 м* аралыкка жылат. Түртүүчү күч канча жумуш аткарат?

Көрсөтмө. Кулон мыйзамы боюнча заряддардын өз ара аракеттенүү күчү $F(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e_1 e_2}{\varepsilon x^2}$ (н), эгерде e_1, e_2– заряддардын

чоңдуктары ($к$), x – заряддардын ортосундагы аралык ($м$), $\varepsilon^0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ *Ф/м* – вакуумдун диэлектрдик өтмүшү, ε– чөйрөнүн диэлектрдик өтүмдүүлүгү (парафин үчүн $\varepsilon = 2$).

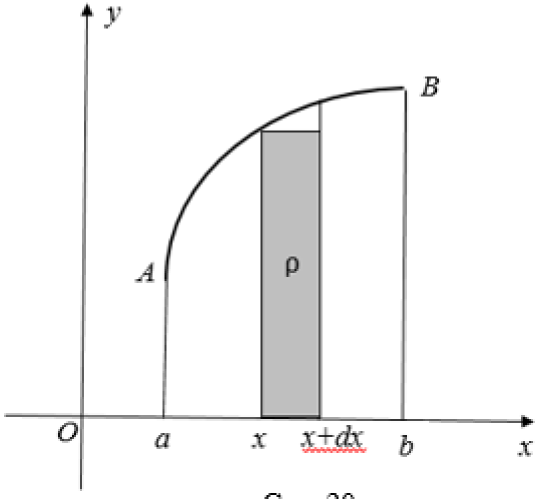
370. *10 Н* күч *1 см* ге созсо, пружинаны *6 см* ге созуу үчүн канча жумуш аткаруу керек?

Көрсөтмө: Гук мыйзамы боюнча пружинаны созуучу күч

$$F(x) = kx,$$

мында x - пружинанын узартылышы, ал эми k - маселенин шарттарынан оңой табылуучу пропорционалдык коэффициент.

4. Жалпак фигуранын статистикалык моменттери жана оордук борбору. $y = f(x)$ функциясынын графиги менен жогорудан чектелген, $y \geq 0$ болгон ийри сызыктуу $aABb$ трапецияны (20-сүрөт) карап көрөлү. Масса ушул трапеция боюнча бир калыпта таралган дейли, ошондуктан беттик тыгыздык ρ туруктуу. Координата окторуна жана оордук борборуна карата трапециянын M_x жана M_y статистикалык моменттерин аныктоо талап кылынат.



Сүр. 20

Ox огунун $[x, x + dx]$ элементардык кесиндисин алалы. Ийри сызыктуу трапецияда болжол менен тик бурчтук деп эсептелген элементардык тилке өзгөчөлөнөт (20-сүрөттө тик бурчтук штрихтелген). Тилкенин массасы dm тыгыздыгы ρ менен тилкенин аянты ydx көбөйтүндүсүнө барабар, б.а.

$$dm = \rho y dx.$$

Бул масса тилкенин борборунда топтолгон деп ойлойбуз, б.а. $P\left(x, \frac{y}{2}\right)$ чекитинде. Анда трапециянын Ox огуна карата статистикалык моментинин "элементи" Р чекитинин ординатасы боюнча dm массасынын көбөйтүндүсү катары алынат, б.а.

$$dM_x = dm \cdot \frac{y}{2} = \frac{1}{2}\rho y^2 dx.$$

Ушул сыяктуу,

$$dM_y = dm\, x = \rho xydx.$$

Бул "элементтерди" $[a, b]$ кесиндиси боюнча интегралдоо менен биз төмөнкү натыйжага келебиз:

$$M_x = \frac{1}{2}\rho \int_a^b y^2\, dx;\ M_y = \rho \int_a^b xy\, dx\ . \qquad (3)$$

Эми фигуранын оордук борборунун ξ, η координаттарын аныктоо оңой. Белгилүү болгондой, $m\eta = M_x, m\xi = M_y,$ мында m – төмөндөгү формула менен эсептелген фигуранын массасы

$$m = \rho \int_a^b ydx.$$

Бул жерден (3) формулаларды эске алып

$$\xi = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b xydx}{\int_a^b ydx},\ \eta = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2dx}{\int_a^b ydx} \qquad (4)$$

алабыз.

371. Ox жана Oy огуна жана $x + y = a, x = 0, y = 0$ түз сызыктары менен чектелген үч бурчтуктун оордук борборунун координаталарына карата статистикалык моменттерди тапкыла (тығыздык $\rho = 1$).

Ч ы г а р у у: Бул жерде $y = a - x.$ (3) формулаларды колдонуу менен биз төмөнкүнү алабыз:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^a (a-x)^2\,dx = -\frac{1}{2}\frac{(a-x)^3}{3}\Bigg|_0^a = \frac{a^3}{6};$$

$$M_y = \int_0^a x(a-x)\,dx = \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{a^3}{6}.$$

Моменттердин теңдигин симметрия боюнча да аныктоого болот. Үч бурчтуктун оордук борборунун координаттары (4) формулалар аркылуу эсептелет. $m = S_{\Delta} = \frac{1}{2}a^2$экенин эске алып

$$\xi = \eta = \frac{\frac{a^3}{6}}{\frac{1}{2}a^2} = \frac{a}{3}$$

алабыз.

372. Капталдары a жана b болгон тик бурчтуктун анын капталдарына карата статистикалык моменттерин тапкыла (тығыздыгы $\rho = 1$).

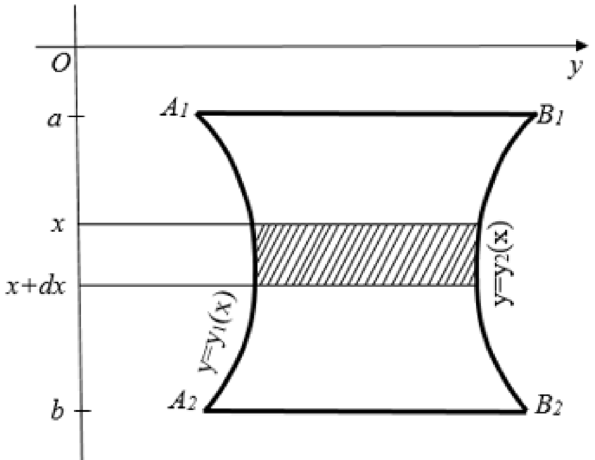
373. $y = sinx$ синусоида жана Ox огунун кесиндиси $x = 0$ чекитинен $x = \pi$ чекитине чейин чектелген фигуранын оордук борборунун координаталары жана Ox жана Oy окторуна карата статистикалык моменттерди эсептегиле (тыгыздыгы $\rho = 1$).

374. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипс жана координата октору ($x \geq 0$, y ≥ 0) менен чектелген фигуранын оордук борборунун координаталарын тапкыла.

375. $x = a(t - sint), y = a(1 - cost)$ циклоиданын биринчи аркасы жана Ox огу менен чектелген фигуранын оордук борборунун координаталарын тапкыла (8-сүрөттү караңыз).

5. Суюктуктун басымы.

Суюктукка $x = a, x = b$ түз сызыктары жана $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ ийрилери менен чектелген $A_1B_1B_2A_2$ пластинасы вертикалдуу түрдө батырылсын.



Сур. 21

Координаттар системасы Oy огу суюктуктун бетинде жаткыдай кылып тандалат деп болжолдонот. Бул пластинанын ар бир тарабы сезген жалпы гидростатикалык P басымды аныктоо талап кылынат. $[a, b]$ аралыгынан $[x, x + dx]$ элементардык кесиндини алабыз. Ошондо биздин пластинадан элементардык тилке чыгат, аны болжол менен аянты $dS = (y_2 - y_1)dx$ болгон тик бурчтук деп кароого болот. (21-сүрөттө белгиленген тилке штрихтелген). Бул тилкедеги суюктуктун басымы бүт $A_1B_1B_2A_2$ пластинасындагы басымдын "элементи" dP болот. dP эсептөө үчүн Паскаль мыйзамын колдонобуз, ага ылайык, dS аянтындагы суюктуктун басымы жердин бетинен x тереңдикте жайгашкан суюктуктун цилиндрдик мамычасынын салмагына барабар, анын негизи ушул аймакка ээ, б.а.

$$dP = \gamma dSx,$$

мында γ – суюктуктун салыштырма салмагы.

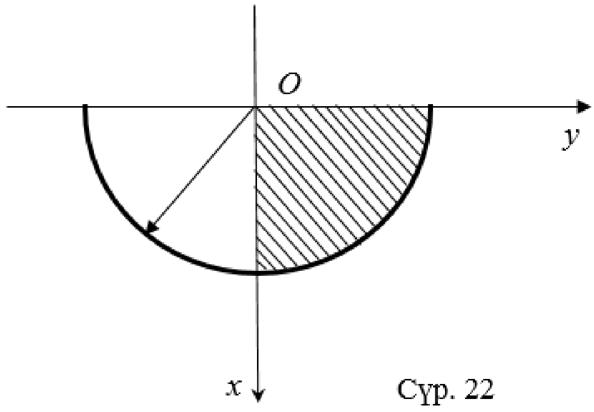
Же, ошону эске алганда

$$dS = (\,y_2 - \,y_1)dx, dP = \gamma x(\,y_2 - \,y_1)dx.$$

$[a, b]$ кесиндиси боюнча интегралдап, бүт фигурадагы суюктуктун басымын алабыз:

$$P = \gamma \int_a^b x(y_2 - y_1)dx. \qquad (5)$$

376. Суюктуктун диаметри суюктуктун бетине дал келгидей, радиусу r жарым тегерекченин ар бир тарабы суюктукка батырылган басымдын күчүн тапкыла. γ суюктуктун салыштырма салмагы.



Сүр. 22

Ч ы г а р у у: Симметриядан улам тегеректин чейрегинин бир тарабындагы басымды таабуу жетиштүү жана алынган жыйынтыкты эки эсеге көбөйтүү керек. 22-сүрөттө көрсөтүлгөндөй координаттар системасын тандап, $a = 0, b = r, y_1(x) = 0, y_2(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$болгондо (5) интегралды эсептейбиз:

$$\frac{1}{2}P = \gamma \int_0^r x\sqrt{r^2 - x^2}dx = -\frac{1}{3}\gamma\,(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^r = \frac{1}{3}\gamma r^3$$

же

$$\mathrm{P} = \frac{2}{3}\gamma r^3.$$

377. Жактары a *дм* жана b *дм* болгон тик бурчтуу пластинка салыштырма салмагы γ болгон суюктукка вертикалдуу батырылган, узундугу a *дм* болгон жагы суюктуктун бетинде жатат. Пластинанын ар бир жактарындагы басымдын күчүн аныктагыла.

378. Үч бурчтуктун чокусу суунун эркин бетинде жатат жана негизи ага параллель деп эсептеп, негизи $b\,m$ жана бийиктиги $h\,m$ болгон тең жактуу үч бурчтуктун формасына ээ болгон вертикалдуу чөмүлгөн пластинанын ар бир жактарындагы суунун басымынын күчүн эсептегиле.

379. Вертикалдык платина тең капталдуу трапециянын формасына ээ. Плотинанын үстүнкү негизи $a = 70$ м, төмөнкү негизи $b = 50$ м, плотинанын бийиктиги $h = 20$ м экендиги белгилүү болсо, плотинага суунун басымынын күчүн эсептегиле.

6. Электр энергиясынын саны. Өткөргүч аркылуу өзгөрүлмө күчтөгү ток өтсүн $I = I(t)$, мында $I(t) \geq 0$). $[t_1, t_2]$ $(t_1 < t_2)$ убакыт аралыгында өткөргүчтүн кесилишинен агып өткөн Q электр энергиясынын санын аныктагыла. I туруктуу ток үчүн төмөнкү белгилүү

$$Q = I(t_2 - t_1).$$

Өзгөрмө toktun шартында Q аныктоо үчүн жалпы схема боюнча иштейбиз (1-параграфты караңыз). $[t, t + dt]$ убакыттагы элементардык кесиндини тандап алалы жана dQ электр

энергиясынын санынын тиешелүү “элементин” эсептеп көрөлү. Албетте, төмөнкүдөй болот

$$dQ = I(t)dt.$$

Андан ары t_1 ден t_2 ге чейинки пределдерде t боюнча интегралдап төмөнкүнү алабыз

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt. \qquad (6)$$

Эскертүү. Эгерде $[t_1, t_2]$ кесиндисинндеги $I(t)$ функциясы белгини өзгөртсө (токтун багыты берилген убакыттын ичинде өзгөрөт), анда (6) интеграл өткөргүчтүн кесилишинен $(t_2 - t_1)$ убакыттын ичинде бир багытта өткөн электр энергиясынын саны менен ошол эле убакта карама-каршы багытта өткөн электр энергиясынын санынын ортосундагы айырманы берет.

380. Температура өзгөргөндө металл өткөргүчтөрдүн каршылыгы $R = R_0(1 + 0.004\vartheta)$ мыйзамы боюнча өзгөрөт (кадимки температурада), мында R_0–0°C каршылык, ϑ– Цельсия боюнча температура. (Бул мыйзам көпчүлүк таза металлдар үчүн туура). 0°C болгондо каршылыгы $R_0 = 10$ Ом болгон өткөргүч 10 мүнөттүн ичинде $\vartheta_1 = 20^\circ$ дөн $\vartheta_2 = 200^\circ$ ге чейин бир калыпта ысытылат. Бул учурда андан $U = 120$ В чыңалуудагы ток өтөт. Бул убакыттын ичинде өткөргүч аркылуу канча кулон электр энергиясы өтөт?

Ч ы г а р у у. Маселенин шартына ылайык өткөргүчтүн температурасы ϑ туруктуу ылдамдыкта жогорулайт

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{200^0 - 20^0}{600 \text{ сек}} = 0{,}3 \frac{\text{град}}{\text{сек}},$$

Демек, ϑ закон боюнча өзгөрөт

$$\vartheta = \vartheta_1 + 0{,}3t = 20 + 0{,}3t.$$

Бул учурда өткөргүчтүн каршылылыгы

$$R = R_0(1 + 0.004\vartheta) = 10[1 + 0{,}004(20 + 0{,}3t)] = 10{,}8 + 0{,}012t,$$

жана токтун күчү (Омдун закону боюнча)

$$I = \frac{120}{10{,}8 + 0{,}012t}.$$

Бул функцияны $[0, 600]$ аралыгы боюнча интегралдап, электр энергиясынын изделүүчү санын алабыз.

$$Q = \int_0^{600} \frac{120dt}{10{,}8 + 0{,}012t} = \frac{120}{0{,}012} \ln(10{,}8 + 0{,}012t)|_0^{600} =$$

$$= 10^4 \cdot (ln18 - ln10{,}8) \approx 5110 \text{ (к)}.$$

381. Өткөргүчтөгү токтун I күчү убакыттын өтүшү менен $I = 2 + 3t^2$ законуна ылайык өзгөрөт, мында I ампер менен жана t секундада көрсөтүлөт. Табуу керек: 1) өткөргүчтүн кесилишинен $t_1 = 2$ секунддан $t_2 = 5$ секундага чейинки убакытта канча сандагы электр энергиясы өтөт, 2) туруктуу токтун кандай күчүндө бир эле убакыттын ичинде өткөргүчтүн кесилишинен бирдей өлчөмдөгү электр энергиясы өтөт?

382. Секундасына 50 термелүү болгон кадимки өзгөрмө токтун (шаардын) күчү t убакыттын өтүшү менен төмөнкү закон боюнча өзгөрөт.

$$I = I_0 \sin 100\pi t,$$

мында $I_0 = const-$ токтун күчүнүн эң чоң мааниси. $t_1 = 0$ секундтан $t_2 = 0{,}01$ сек чейинки убакытта (жарым мезгил үчүн) өткөргүчтүн кесилишинен агып өткөн электр энергиясынын санын тапкыла.

383. Электр чынжырындагы чыңалуу $U = 120\text{В}$. Мындан тышкары, чынжырга секундасына $R_0 = 10\,Ом$ туруктуу каршылык камтылган. Эки мүнөттүн ичинде чынжырдан канча кулон электр энергиясы өтөт?

БАП 3. АНЫКТАЛГАН ИНТЕГРАЛДЫН ЭКОНОМИКАДА КОЛДОНУЛУШУ.

§ 3.1 ИНТЕГРАЛДЫН ЭКОНОМИКАЛЫК МААНИСИ.

$z = f(t)$ функциясы убакыттын өтүшү менен кээ бир өндүрүштүн өндүрүмдүүлүгүнүн өзгөрүшүн сүрөттөсүн дейли. $[0, T]$ убакыт аралыгында өндүрүлгөн өндүрүштүн V көлөмүн табабыз.

Аныкталган интегралдын аныктамасын эске алып, төмөнкүнү алабыз

$$V = \int_0^T f(t)dt,$$

б.а.эгерде $f(t) -$ t убактысында эмгектин өндүрүмдүүлүгү болсо, анда $\int_0^T f(t)dt$, $[0, T]$ убакыт аралыгында өндүрүлгөн өндүрүштүн көлөмү. Микроэкономика курсунда пределдик чоңдуктар каралат, б.а. кандайдыр бир $f(x)$ функция менен көрсөтүлгөн берилген чоңдук үчүн анын туундусу $f'(x)$ каралат. Ошондуктан, көп учурда берилген функциянын пределдик чоңдуктарынын (туунду) экономикалык функциясын (баштапкы функцияны) табууга туура келет.

384.Эгерде убакыт аралыгындагы эмгек өндүрүмдүүлүгү $f(t) = \frac{3}{4t+6}$ формула менен берилсе, жумушчу күндүн жетинчи саатында өндүргөн продукциянын көлөмүн эсептегиле.

Чыгаруу.

$$V=\int_{6}^{7}\left(\frac{3}{4t+6}+4\right)dt=\frac{3}{4}ln|4t+6|\Big|_6^7+4t|_6^7$$

$$=\frac{3}{4}(ln\,34-ln\,30)+4=$$

$$=\frac{3}{4}ln\frac{34}{30}+4=\frac{3}{4}ln\frac{17}{14}+4\approx 4{,}09\text{ (продукция бирдиги)}$$

385. Эгерде продукциянын келип түшүүсү $f(t)=3t^2+2t+3$ функциясы менен сүрөттөлсө (жумуш күнү 7 саат) бир жумуш күнүнө түзүлүүчү кампадагы продукциянын К запасын эсептегиле.

Чыгаруу.

$$K=\int_0^7(3t^2+2t+3)dt=3\frac{t^3}{3}\Big|_0^7+\frac{2t^2}{2}\Big|_0^7+3t|_0^7=7^3+7^2+21=413\text{ (продукция бирдиги)}$$

386. Эгерде x продукциянын көлөмү $x_1=1$ ден $x_2=3$ чейин өзгөрсө, акчалай бирдикте туюнтулган $K(x)=6x^2+2x+1$ чыгымдын орточо маанисин тапкыла.

Чыгаруу.

Эгерде өндүрүштүн көлөмү x_1 ден x_2ге чейин өзгөрсө, анда өндүрүштүк чыгымдардын орточо мааниси $K(x)$ төмөнкү формула менен туюнтулат

$$K(c)=\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}K(x)dx.$$

Эгерде $K(x)=6x^2+2x+1, x_1=1, x_2=3$, анда

$$K(c) = \frac{1}{3-1}\int_1^3 (6x^2 + 2x + 1)dx = \frac{1}{2}(2x^3 + x^2 + x)|_1^3$$

$$= \frac{1}{2}(54 + 9 + 3 - 2 - 1 - 1 =).$$

б.а. чыгымдын орточо мааниси 31 акчалай бирдикке барабар.

387. Эгерде эмгек өндүрүмдүүлүгү $f(t) = -t^2 + 10t$ (бирд./саат) функция менен берилсе, t = 6 саат убакыт ичинде өндүрүлгөн продукциянын көлөмүн тапкыла.

Чыгаруу. Продукциянын көлөмүн табуу формуласын колдонолу.

$$V = \int_0^t f(t)dt = \int_0^6 (-t^2 + 10t)\,dt = \left(-\frac{t^3}{3} + \frac{10t^2}{2}\right)\Bigg|_0^6 = 108\ (\$)$$

388. Эгерде сутка ичинде эмгек өндүрүмдүүлүгү $f(t) = -0{,}2t^2 + 1{,}6t + 3$ формула боюнча өзгөрсө, (мында t саат боюнча убакыт) 8 саатка созулган жумуштун күндүк өндүрүшүн Q тапкыла.

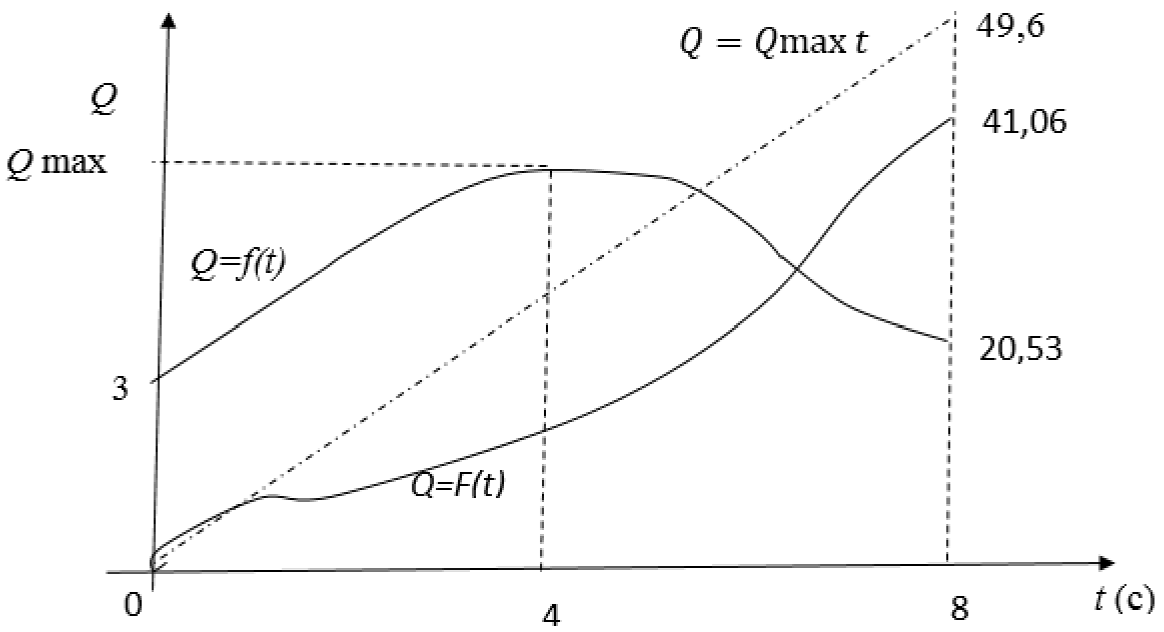
Экономикалык анализ жүргүзгүлө.

Чыгаруу. Күндүк өндүрүштү $Q = \int_0^t f(t)dt$ формуласы менен табабыз.

$$Q = \int_0^8 (-0{,}2t^2 + 1{,}6t + 3)dt = F(t)|_0^8$$

$$= \left(-\frac{0{,}2}{3}t^3 + 0{,}8t^2 + 3t\right)\Bigg|_0^8 = 41{,}06\ \$.$$

Функциянын графигин түзөбүз



Эгерде жумуш сутка бою ритмдүү жана максималдуу өндүрүмдүүлүк $f(t) = 6{,}2)$ менен аткарылса, анда күндүк өндүрүш $Qmax = 49{,}6$ же 21% көп болмок.

Сүрөттө күндүк өндүрүш сан жагынан жогору жагынан $f(t)$ ийри сызыгы менен чектелген ийри сызыктуу трапециянын аянтына барабар, экинчи ийри $F(t)$ убакыттын өтүшү менен өндүрүштүн өсүшүн көрсөтөт. $t = 4$ саат мааниси $F(t)$ ийри сызыгынын ийилүү чекитине туура келет: жумуш күнүнүн биринчи жарымында өндүрүмдүүлүк экинчисине караганда жогору. Түз сызык $Q = Q\max t$ бирдей өндүрүмдүүлүк менен өндүрүштүн көлөмүнө туура келет. Мында продукциянын көлөмү 49,6 $ түзмөк.

389. Жумушчунун өндүрүмдүүлүгүн аныктагыла:

а) бүткүл жумуш күнү үчүн;

б) жумуштун үчүнчү сааты үчүн;

в) жумуштун акыркы сааты үчүн, эгерде жумуш күнү 6 саатты түзсө, ал эми $f(t) = -3t^2 + 18t$ эмгек өндүрүмдүүлүгү;

г) маселенин экономикалык анализин жүргүзүү.

Чыгаруу.

$$V = \int_0^t f(t)dt$$

формуласы аркылуу жумушчунун бир күндүк (6 саат) жалпы өндүрүшүн табабыз;

$$V = \int_0^6 (-3t^2 + 18t)\,dt = \left(-\frac{3t^3}{3} + \frac{18t^2}{2}\right)\Bigg|_0^6 = (-t^3 + 9t^2)|_0^6 =$$

$$= (-216 + 324) = 108\ (\$)$$

Жумуштун үчүнчү саатында иштеген жумушчунун өндүрүмдүүлүгүн аныктайбыз

$V = \int_2^3 (-3t^2 + 18t)\,dt = (-t^3 + 9t^2)|_2^3 = 26$ *(кубм)*

Ушуга окшош эле, жумуштун акыркы сааты үчүн жумушчунун өндүрүмдүүлүгүн аныктайбыз:

$V = \int_5^6 (-3t^2 + 18t)\,dt = (-t^3 + 9t^2)|_5^6 = 8$ *($)*

Толук жумуш күнүндө ичинде 108$ продукция өндурүлгөн. Үчүнчү саат жумуш үчүн 26$, акыркы саат үчүн, 8$. Бул иш чарчатат жана көп стрессти талап кылат, ошондуктан, сменанын аягына чейин, эмгек өндүрүмдүүлүгү түшөт.

390. Эң белгилүү өндүрүш функциясы Кобб-Дуглас функциясы $Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$ болот, мында $A, \alpha, \beta -$ терс эмес константалар жана $\alpha + \beta \leq 1$. $K -$нарктык же накталай түрдөгү каражаттардын көлөмү (айталы, станоктордун саны), L – эмгек ресурстарынын көлөмү (жумушчулардын саны, адам-күндөрдүн саны), Q - нарктык же натуралдык түрдөгү өндүрүш.

Эгерде Кобб-Дуглас функциясында эмгек чыгымдары убакыттан сызыктуу көз каранды, ал эми капиталдык чыгымдар туруктуу деп эсептелсе, анда $f(t) = (\alpha t + \beta)e^{rt}$ түргө ээ. Анда T убакыттын ичинде өндүрүштүн көлөмү төмөнкүдөй болот:

$$Q = \int_0^T (\alpha t + \beta)\, e^{rt} dt$$

Кобб-Дуглас функциясы $f(t) = (1 + t)e^{2t}$ээ болсо, 5 жылда өндүрүлгөн продукциянын көлөмүн тапкыла.

Чыгаруу.

Өндүрүлгөн продукциянын көлөмү

$$Q = \int_0^5 (1 + t)e^{2t} dt$$

Интегралды эсептөө үчүн бөлүктөп интегралдоо ыкмасын колдонобуз.

$$u = 1 + t, du = dt, dv = e^{2t}dt, v = \frac{1}{2}e^{2t}.$$

$$Q = \frac{1}{2}(1 + t)e^{2t}|_0^5 + \frac{1}{2}\int_0^5 e^{2t}dt = 7549899\ \$$$

§ 3.2. БУЮМДАРДЫ ӨНДҮРҮҮНУН ОРТОЧО УБАКТЫСЫН ТАБУУ

$t = t(x)$ функциясы белгилүү болсун, ал өндүрүштү өздөштүрүү даражасына жараша t буюмду даярдоого кеткен убакыттын өзгөрүшүн сүрөттөйт, мында x - сериядагы буюмдун тартибинин номери.

Анда бир буюмду жасоого кеткен орточо убакыт x_1 ден x_2чейин иштеп чыгуу мезгилинде орточо теоремасы менен эсептелет:

$$t_{орт} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} t(x)dx$$

Көпчүлүк учурларда $t = t(x)$ буюмду жасоого кеткен убакыттын чыгымынын өзгөрүү функциясы төмөнкүдөй түргө ээ

$$t = ax^{-b},$$

мында a −биринчи буюмга коротулган убакыт, b − өндүрүш процессинин көрсөткүчү.

391. Эгерде убакыттын өзгөрүү функциясы $t = 100x^{-\frac{1}{2}}$ (с) болсо, $x_1 = 50$ дон $x_2 = 75$ чейин иштеп чыгуу мезгилинде бир буюмду өздөштүрүү үчүн кеткен орточо убакытты тапкыла.

Чыгаруу. Орточо жөнүндөгү теореманы колдонуп, төмөнкүнү алабыз

$$t_{орт} = \frac{1}{75 - 50} \int_{50}^{75} 100x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{100}{25} \int_{50}^{75} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 8\sqrt{x}\Big|_{50}^{75} \approx 11{,}2 \text{ (с)}.$$

§ 3.3 АКЧА АГЫМЫНЫН ДИСКОНТТОЛГОН НАРКЫН ТАБУУ

Баштапкы сумманы t жылдан кийин жылдык белгилүү пайыздык p менен алынган акыркы мааниси боюнча аныктоо дисконттоо деп аталат**.** Капиталдык салымдардын экономикалык эффективдүүлүгүн аныктоодо мына ушул сыяктуу проблемалар кездешет. Жыл сайын алынган киреше убакыттын өтүшү менен өзгөрүп $f(t)$ функциясы менен мүнөздөлсүн жана p ге барабар болгон белгилүү пайыздык чен менен пайыздар үзгүлтүксүз чегерилет. Анда дисконттолгон киреше К убакыттын өтүшү менен төмөнкү формула менен эсептелет:

$$K = \int_0^T f(t)e^{-pt}dt$$

392. Баштапкы салым 15 миллион сомду түзгөн болсо жана жыл сайын капиталын 5 миллион сомго көбөйтүү пландаштырылса, 10% пайыздык чен боюнча үч жыл үчүн эсептик кирешени аныктагыла. Экономикалык анализ жүргүзгүлө.

Чыгаруу. Ар жылдык кирешенин функциясын түзөлү $f(t) = 15 + 5t$. Анда капитал салымынын дисконттолгон суммасы төмөнкүдөй табылат

$$K = \int_0^3 (15 + 15t)e^{-0,1t}dt$$

Бөлүктөп интегралдап

$$u = 15 + 15t, du = 5dt, dv = e^{-0,1t}dt, v = -10e^{-0,1t}$$

Демек, $K = -10(15+15t)e^{-0,1t}|_0^3 + 50\int_0^3 e^{-0,1t}dt = -72 - 500\,e^{-0,1t}|_0^3 = -72 - 130 = 58\ (\text{млн. сом})$

Бул үч жылдан кийин ошол эле көбөйгөн сумманы алуу үчүн, жылдык капиталдык салымдар 15тен 30 миллион сомго чейин жетет, ошол эле эсептелген үзгүлтүксүз пайыздык чен боюнча, бир эле учурда алгачкы салымдары 58 миллион сомго барабар дегенди билдирет.

§ 3.4 БЕЛГИЛҮҮ ИНВЕСТИЦИЯЛАРДАН КАПИТАЛДЫ ТАБУУ

Таза инвестициялар (капиталдык салымдар) деп, иштебей калган негизги каражаттарды (капитал) алмаштыруу үчүн инвестицияларды алып салгандан калган экономикага белгилүү бир убакыттын ичинде (көбүнчө бир жылда) жумшалган инвестициялардын жалпысы аталат.

Ошентип, убакыт бирдигине капитал таза инвестициянын көлөмүнө көбөйөт.

Эгерде капиталды убакыттан функция $K(t)$ деп белгилесек,

ал эми чыныгы инвестициялар - $I(t)$ болсо, жогоруда айтылгандарды төмөнкүдөй жазууга болот

$$I(t) = \frac{d}{dt}K(t)$$

б.а. t убакыт боюнча капиталдын туундусу.

Көпчүлүк учурда t_1 ден t_2 убакыт ичинде капиталдын өсүндүсүн табуу талап кылынат

$$\Delta K = K(t_2) - K(t_1)$$

$K(t)$ функциясы $I(t)$ функциясы үчүн баштапкы болот, ошондуктан төмөнкүдөй жазууга болот:

$$\Delta K = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt = K(t_2) - K(t_1)$$

393. $I(t) = 500\sqrt{t}$ ($) функциясы менен таза инвестициялар берилсин. 2 жыл ичинде капиталдын өсүшүн аныктоо талап кылынат.

Чыгаруу. 2 жыл ичинде капиталдын өсүшүн табабыз.

$$\Delta K = \int_0^2 500\sqrt{t}dt = \left.\frac{500t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^2 = \frac{500 \cdot 2}{3}\sqrt{8} \approx 943{,}3\ (\$).$$

394. $I(t) = 300\sqrt[3]{t}$ таза инвестициялардын функциясы берилген. Капиталдын өсүшү 5000 $ түзүш үчүн, канча жыл талап кылынарын аныктагыла.

Чыгаруу. Изделүүчү убакыттын аралыгын $[0, \mathrm{T}]$ менен белгилейбиз жана капиталдын өсүшүнүн формуласын колдонуп, төмөнкүнү алабыз

$$5000 = \int_0^T (300\sqrt[3]{t})dt = \left.\frac{4 \cdot 300\sqrt[3]{t^4}}{3}\right|_0^T = 400\sqrt[3]{T^4}$$

Теңдемени жазабыз: $5000 = 400\sqrt[3]{T^4}$

Аны чыгарып, табабыз: $T = 6.64$

Капиталдын өсүшү 5000 болуш үчүн 6,64 жыл талап кылынат.

Көнүгүүлөр

395. Кандайдыр бир ишкананын жумушчусу үчүн x убакыттын функциясы катары эмгек өндүрүмдүүлүгүнүн өзгөрүшүн мүнөздөгөн үзгүлтүксүз $f(x) = 10 + 2sin^2 \pi x$ функциясы белгилүү болсун. $x_1 = 1$ ден $x_2 = 3$ чейин убакыт аралыгында жумушчу тарабынан өндүрүлгөн продукциянын көлөмүн аныктагыла.

396. Эгерде x продукциянын көлөмү $x_1 = 1$ ден $x_2 = 5$ чейин өзгөрсө, акча бирдигинде туюнтулган $K(x) = 2^{x+1} + 4$ чыгымдардын орточо маанисин тапкыла.

397. Эгерде убакыт аралыгында эмгек өндүрүмдүүлүгү $f(x) = 42\left(1 + \frac{x}{x^2+1}\right)$ формуласы менен берилсе, $x_1 = 0$ ден $x_2 = 2$ ге чейинки убакыттын ичинде жумушчу тарабынан өндүрүлгөн продукциянын көлөмүн эсептегиле.

§ 3.5 . ИНТЕГРАЛДЫН ФИНАНСЫДА КОЛДОНУЛУШУ

1. Эгерде баштапкы салым p ны түзсө, проценттик чен r болсо, анда t убакыт аралыгынан кийинки салымдын чоңдугу төмөнкү формула менен аныкталат:

$$S = pe^{\frac{rt}{100}}.$$

Үзгүлтүксүз пайыздарга карата рента (кадимки төлөмдөр) наркын табуу үчүн тескери маселени карап көрөлү. Бул учурда

төлөмдөр t убактысына жараша болот, башкача айтканда tдан функция болуп саналат, аны төмөнкүдөй жазууга болот

$p = p(t)$.

Анда S салым чоңдугу T жылдан кийин төмөнкү формула менен аныкталат:

$$S = \int_0^T p(t) e^{\frac{r(T-t)}{100}} dt.$$

Эгерде $S = pe^{\frac{r(T-t)}{100}}$ формула менен үзгүлтүксүз пайыздык үчүн байланышкан дисконттолгон сумма түшүнүгүн карасак, эгерде t жылдан кийин баштапкы салым S чоңдукту түзсө, ал эми үзгүлтүксүз пайыздык чен r барабар болсо, анда бул формула баштапкы салым p чоңдугун аныктоого мүмкүндүк берет. Бул учурда рента маселеси төмөнкүчө түзүлүшү мүмкүн: эгерде бул салым боюнча үзгүлтүксүз төлөмдөр T жыл ичинде жыл сайын S ти түзсө p баштапкы салым чоңдугун тапкыла.

Эсептөө формуласы төмөнкүдөй түргө ээ

$$p = \int_0^T S e^{-\frac{rt}{100}} dt.$$

398. Эгерде пайыздык чени 8%, баштапкы капиталы 50000$ болсо, 2 жылдан кийинки салымдын чоңдугун аныктагыла.

Чыгаруу. $p = \int_0^T S e^{-\frac{rt}{100}} dt$ формуласын колдонуп, 2 жылдан кийин салымдын жалпы чоңдугун алабыз:

$$S=\int_0^2 50000\,e^{\frac{8(2-t)}{100}}dt=50000\int_0^2 e^{\frac{16-8t}{100}}dt$$

$$=50000\left(-\frac{100}{8}\,e^{\frac{8(2-t)}{100}}\right)\Bigg|_0^2=108437{,}5\ \$.$$

399. Эгерде төлөмдөрү 75 $ түзсө, үч жыл ичинде пайыздык чени 5% болгон баштапкы салымды аныктоо керек.

Чыгаруу. $p=\int_0^T Se^{-\frac{rt}{100}}dt$ формуласын колдонуп, төмөнкүнү алабыз

$$p=\int_0^3 75e^{-\frac{5t}{100}}dt=75\left(-\frac{100}{8}\,e^{-\frac{5t}{100}}\right)\Bigg|_0^3\approx 206{,}25\ (\$)$$

Изделүүчү баштапкы салым $206{,}25$$ түзөт.

§ 3. 6. ТУРУКТУУ ӨСҮҮ ТЕМПТЕРИ МЕНЕН ЖАБДУУЛАРДЫ ЧЫГАРУУ

Белгилүү түрдөгү жабдууларды чыгаруу аны чыгаруунун өсүү темптери менен мүнөздөлөт

$$K=\frac{y'(t)}{y(t)}$$

мында K −белгилүү туруктуу чоңдук (жыл сайын өсүү темпи), $y(t)$ - t убакыттагы убакыт бирдиги үчүн өндүрүштүн деңгээли, $y'(t)$ - $t=1$ убакыттын ичинде жабдууларды чыгаруунун өсүшү.

Убакыттын алгачкы $t=0$ мезгилинде жабдуулардын жылдык өндүрүшүнүн деңгээли y_0 болсо, t убагындагы жабдуулардын

жалпы саны (анын бирдиги жыл) төмөнкү формула боюнча табылат

$$Y(t) = \int_0^t y_0 e^{kt}\,dt. \qquad (1)$$

400. Эгерде жыл сайын өсүү $k = 7\%$, ал эми $y_0 = 12\$$ болсо, үч жылдагы өндүрүлгөн жабдуулардын жалпы санын тапкыла.

Чыгаруу. (1) формуланы колдонуп, алабыз

$$Y(t) = \int_0^3 12e^{0,07t}\,dt = 12 \cdot \frac{100}{7} e^{0,07t}\Big|_0^3 = \frac{1200}{7}(e^{0,21} - 1)$$

$$= 39,43\ (\$).$$

§ 3.7 ДЖИНИ КОЭФФИЦИЕНТИН ЭСЕПТӨӨ

Коомдун социалдык-экономикалык түзүлүшүн талдоо үчүн коомдо байлыктын бөлүштүрүлүшүнүн «диаграмма же Джини ийри сызыгы» деп аталган нерсе колдонулат. Лоренц ийри сызыгын $y = f(x)$ - кирешенин пайызынын аларга ээ болгон калктын пайызына көз карандылыгын (ОБА ийри сызыгы, 2-сүрөт) изилдөө менен, биз калктын кирешесин бөлүштүрүүдө теңсиздиктин даражасын баалай алабыз.

Кирешенин бирдей бөлүштүрүлүшү менен Лоренц ийри сызыгы түз сызык ОА болуп туюнтулат.

Демек, көлөкөлүү бөлүктүн аянты канчалык чоң болсо, коомдогу байлык ошончолук бирдей эмес бөлүштүрүлөт.

Джини коэффициенти - бул ОАВ фигурасынын аянты ОАС үч бурчтугунун аянтына таандык, б.а.

$$K = \frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta OAC}}$$

Аныктама боюнча:

$$K = \frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta OAC}} = \frac{\frac{1}{2} - S_{\Delta OBAC}}{\frac{1}{2}} = 1 - 2\int_0^1 f(x)dx,$$

мында $S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}$, $S_{\Delta OBAC} = \int_0^1 f(x)dx$

401. Кирешелерди бөлүштүрүүдө жүргүзүлгөн изилдөөлөр боюнча өлкөлөрдүн биринде Лоренц ийри сызыгын $y = 1 - \sqrt[3]{x}$ теңдеме менен мүнөздөөгө болот, мында x – калктын үлүшү, y – калктын кирешесинин үлүшү. Джиндин коэффициентин эсептеп, экономикалык анализ жүргүзгүлө.

Чыгаруу.

$$K = 1 - 2\int_0^1 f(x)dx$$

формуласын колдонуп

$$K = 1 - 2\int_0^1 \left(1 - \sqrt[3]{x}\right)dx = 1 - 2\left(x - \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right)\Bigg|_0^1 = 1 - 2\left(1 - \frac{3}{4}\right)$$

$$= 0{,}5$$

K нын жетишээрлик жогорку мааниси каралып жаткан өлкөдө калктын кирешелеринин олуттуу бирдей эмес бөлүштүрүлүшүн көрсөтөт.

§ 3.8. ЭКОНОМИКАЛЫК МАСЕЛЕЛЕРДЕГИ ӨЗДҮК ЭМЕС ИНТЕГРАЛДАР

Жер участогун эксплуатациялоодо тынымсыз акча агымы берилсин дейли. Эгерде $r-$ үзгүлтүксүз пайыздык чен, ал эми $R(t)$) тиешелүү рента болсо, анда жер участогунун дисконттолгон наркын табуу өздүк эмес интегралды камтыган формулага алып келет.

$$P = \int_0^{\infty} R(t)e^{-\frac{rt}{100}}dt.$$

402. Эгерде жер участогунан алынган рента $R(t) = 3,\ r = 12\%$ болсо, жер участогунун дисконттолгон баасын аныктагыла. Экономикалык талдоо жүргүзгүлө.

Чыгаруу.

Формуланы колдонуп, төмөнкүнү алабыз:

$$P = \int_0^{\infty} 3e^{-0,6t}e^{-0,12t}dt = 3\int_0^{\infty} e^{-0,72t}dt ==$$

$$3\lim_{b\to\infty}\int_0^{\infty} e^{-0,72t}dt = 3\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{100}{72}e^{-0,72b} - 1\right)\Big|_0^b =$$

$$-\frac{300}{72}\lim_{b\to\infty}(e^{-0,72t} - 1) = \frac{300}{72} = 4,16 \textit{ (миң сом)}$$

Жер участогунун баштапкы баасы 3 миң сомду түзөт. Туруктуу пайыздык чен боюнча акыркы наркы 4,16 мин сомго барабар болот.

Жооптор

5. $\frac{7}{12}x\sqrt[7]{x^5}+C$. **6.** $\frac{2}{9}x^9-\frac{5}{6}x^6+C$. **7.** $-\frac{1}{x}+C$. **8.** $x-\frac{1}{x}-2\ln|x|+C$. **9.** $\frac{x^2}{2}+2x+C$. **10.** $-\frac{1}{x}-\ln|x|+C$. **11.** $\frac{2}{3}\ln|x|-\frac{1}{3}x+\frac{x^2}{6}+C$. **12.** $x+arc\text{tg}x+C$. **13.** $-\frac{2}{x}+arc\text{tg}x+C$. **14.** $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$. **15.** $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x+C$. **16.** $\frac{4}{17}x^4\sqrt[4]{x}-\frac{8}{13}x^3\sqrt[4]{x}+\frac{4}{9}x^2\sqrt[4]{x}+C$. **17.** $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}-\frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$. **18.** $\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+x+C$. **19.** $arc\sin x+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+C$. **20.** $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{9}{7}x^2\sqrt[3]{x}+\frac{18}{13}x^2\sqrt[6]{x}+\frac{x^2}{2}+C$. **21.** $\frac{2^x}{\ln 2}+C$. **22.** $\frac{a^xe^x}{\ln a+1}+C$. **23.** $\frac{1}{\sqrt{7}}arc\text{tg}\frac{x}{\sqrt{7}}+C$. **24.** $\frac{3}{\sqrt{5}}arc\text{tg}\frac{x}{\sqrt{5}}-\ln\left|x+\sqrt{5+x^2}\right|+C$. **25.** $\arcsin\frac{x}{\sqrt{7}}+C$. **26.** $2\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$. **27.** $2e^x+arc\text{tg}x+C$. **28.** $-2\cos x-3\sin x+C$. **29.** $\text{tg}x-c\text{tg}x+C$. **30.** $-2\cos x+C$. **31.** $\text{tg}x+C$. **32.** $x^2-c\text{tg}x+C$. **33.** $\sin x+\cos x+\text{tg}x+C$. **34.** $\frac{1}{2}\text{tg}x+\frac{1}{2}x+C$. **35.** $-2\cos x+3\sqrt[3]{x}+C$. **36.** e^x-x+C. **37.** $\frac{x}{2}+\frac{\sin x}{2}+C$. **38.** $\text{tg}x-x+C$. **42.** $\ln\left|\sin x+\sqrt{sin^2x+3}\right|+C$. **43.** $\frac{\text{tg}^4x}{4}+C$. **44.** $2\sqrt{1-x+x^2}+C$. **45.** $e^{\text{tg}x}+C$. **46.** $\ln(1+sin^2x)+C$. **47.** $e^{arc\sin x}+C$. **48.** $\frac{1}{2}ln^2|x^3+1|+C$. **49.** $\frac{1}{2}arc\text{tg}\,x^2+C$. **50.** $\frac{x^3}{3}-x^2+4x-3\ln|x+2|+C$. **51.** $\frac{1}{3}(\ln x)^3+\ln x+C$. **52.** $\ln(\text{tg}x)+C$. **53.** $\frac{1}{2}(\text{tg}x)^2+\ln\cos x+C$. **54.** $\arcsin\frac{e^x}{2}+C$. **55.** $-2\sqrt{\cos x}+C$. **61.** $\frac{\left(x^2+1\right)^4}{4}+C$. **62.** $2\sqrt{3+\sin x}+C$. **63.** $-\frac{1}{3}\cos 3x+C$. **64.** $\frac{1}{3}e^{x^3}+C$. **65.** $\frac{1}{\cos x}+C$. **66.** $3\sin\frac{x}{3}+C$. **67.** $\frac{1}{2}e^{x^2+4x+3}+C$. **68.** $\frac{1}{\sqrt{6}}arc\text{tg}\frac{x\sqrt{6}}{2}+C$. **69.** $\frac{2^{x^2-1}}{\ln 2}+C$. **70.** $2e^{\sqrt{x}}+C$. **71.** $\frac{arc\text{tg}3^x}{\ln 3}+C$. **72.** $-2\cos\sqrt{x}+C$. **73.** $\frac{1}{3}\ln\left|x^3+\sqrt{x^6-2}\right|+C$. **74.** $2e^{-\frac{x}{2}}+C$. **75.** $\frac{1}{12}\sqrt{(2x^4-3)^3}+C$. **76.** $-\frac{1}{3}\sqrt{7-x^6}+C$. **77.** $\ln|x-5|+C$. **78.** $\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+C$. **79.** $-\frac{2}{9}\sqrt{(4-3x)^3}+C$. **80.** $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^4+1)^2}+C$. **81.** $\frac{1}{2}\sin(x^2+5)+C$. **82.** $\ln(e^x+1)+C$. **83.** $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln|x|)^3}-6\sqrt{\ln|x|}+C$. **84.** $\frac{1}{3}\sqrt[3]{3x^2-2}+C$. **85.** $\frac{2}{3}\sqrt{(arc\text{tg}\,e^x)^3}+C$. **86.** $-\frac{1}{\ln|\sin x|}+C$. **89.** $x\ln|x|-x+C$. **90.** $e^{2x}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)+C$. **91.** $x\,arc\text{tg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$. **92.**

$x\sin x+\cos x+C$. **93.** $\frac{x^2+1}{2}arc\mathrm{tg}x-\frac{x}{2}+C$. **94.** $-x\mathrm{ctg}x+\ln|\sin x|+C$. **95.** $-\frac{\ln|x|+1}{x}+C$. **96.** $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\left(\ln|x|-\frac{2}{3}\right)+C$. **97.** $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left[\ln|x|-\frac{1}{n+1}\right]+C$. **98.** $-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{sin^2x}+c\mathrm{tg}x\right)+C$. **99.** $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$. **101.**$-e^{-x}(x^2+2x+2)+C$. **102.** $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$. **103.** $\frac{1}{2}x^2ln^2|x|-\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{4}x^2+C$. **105.** $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2}+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\right)+C$. **106.** $\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$. **107.** $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)+C$. **108.** $\frac{x}{2}[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]+C$. **109.** $\frac{e^{2x}}{8}(2-\sin 2x-\cos 2x)+C$. **110.** $\frac{1}{2}e^{\arcsin x}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)+C$. **112.** $I_n=\frac{1}{k+1}x^{k+1}ln^nx-\frac{n}{k+1}I_{n-1}$. **113.** $I_n=-\frac{sin^{n-1}x\cos x}{n}+\frac{n}{n-1}I_{n-2}$. **116.** $\ln|x-7|+C$. **117.** $-\ln|3-x|+C$. **118.** $\frac{1}{5}\ln|x+5x|+C$. **119.** $-\frac{1}{3(3x+2)}+C$. **120.** $\frac{1}{10(4-5x)^2}+C$. **122.** $\frac{1}{2}\ln|x^2+7x+13|-\frac{7}{\sqrt{3}}arc\mathrm{tg}\,\frac{2x+7}{\sqrt{3}}+C$. **123.** $\frac{2}{3}\ln|3x^2+2x+5|+\frac{20}{3\sqrt{14}}arc\mathrm{tg}\,\frac{3x+1}{\sqrt{14}}+C$.**124.** $\frac{1}{4}\ln|2x^2+2x+3|+\frac{9}{2\sqrt{5}}arc\mathrm{tg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{5}}+C$.**125.** $\frac{5}{16}\ln|8x^2+x+1|-\frac{117}{8\sqrt{31}}arc\mathrm{tg}\,\frac{16x+1}{\sqrt{31}}+C$. **127.** $\frac{2x-1}{2(x^2+2x+2)}+arc\mathrm{tg}(x+1)+C$. **128.** $\frac{13x-24}{3(x^2-3x+3)}+\frac{26}{3\sqrt{3}}arc\mathrm{tg}\frac{2x-3}{\sqrt{3}}+C$. **130.** $\frac{1}{6}\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x-2|+\frac{1}{3}\ln|x+3|+C$. **131.** $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x++2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C$. **133.** $-\frac{1}{x+2}-\frac{4}{x+4}+2\ln\left|\frac{x+4}{x+2}\right|+C$. **134.** $3x+\frac{6}{x-1}+5\ln|x+2|+C$. **135.** $-\frac{1}{2x^2}-\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}+3\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|+C$. **139.** $\frac{1}{9}\ln(x^2+2)-\frac{1}{9\sqrt{2}}arc\mathrm{tg}\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{9}\ln|x-1|+C$. **140.** $-\frac{3}{x+1}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-2arc\mathrm{tg}\,x+C$. **141.** $-\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\ln|x^2-4x+13|+\frac{4}{3}arc\mathrm{tg}\,\frac{x-2}{3}+C$. **143.** $\frac{1}{x-1}+2\ln|x-1|+\frac{2x+1}{x^2+1}-\ln(x^2+1)+arc\mathrm{tg}\,x+C$. **144.** $\frac{1}{x^2+2x+2}+arc\mathrm{tg}\,(x+1)+C$. **145.** $-\frac{1}{x^2+1}+arc\mathrm{tg}\,x+C$. **146.** $-\frac{1}{3(x^2+2)}+C$. **147.** $arc\mathrm{tg}\,x-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}+C$. 1. **152.** $\frac{2}{3}arc\mathrm{tg}\,\frac{5\mathrm{tg}\frac{x}{2}+4}{3}+C$. **153.** $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}\right|+C$. **154.** $\frac{2}{\sqrt{15}}arc\mathrm{tg}\,\frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{15}}+C$. **155.** $-\ln|3+\cos x|-3\frac{3}{3+\cos x}+C$. **156.** $\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C$. **161.** $-\frac{1}{5}cos^5x+\frac{1}{7}cos^7x+C$.

162. $\frac{1}{3}sin^3x-\frac{2}{5}\ sin^5x+\frac{1}{7}\ sin^7x+C$. **163.** $\cos x-2arc\text{tg}(\cos x)+C$. **164.** $-\frac{1}{4}\sin x+\frac{3}{16}\ln\left|\frac{2\sin x-1}{2\sin x+1}\right|+\text{C}$. **165.** $\frac{1}{2\sqrt{3}}arc\text{tg}\ \frac{2\text{tg}x}{\sqrt{3}}+C$. **166.** $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{4\text{tg}x-3}{4\text{tg}x+1}\right|+C$. **168.** $-6\cos\frac{x}{12}-\frac{6}{7}\cos\frac{7x}{12}+C$. **169.** $\frac{1}{6}\sin 3x+\frac{1}{22}\sin 11x+C$. **170.** $3\sin\frac{x}{6}-\frac{3}{5}\sin\frac{5}{6}x+C$. **171.** $\frac{1}{14}\cos 7x-\frac{1}{26}\cos 13x+C$. **172.** $-\frac{1}{6}\cos 3x+\frac{1}{4}\cos x+\frac{1}{20}\cos 5x+C$. **174.** $-\frac{1}{5}cos^5x+\frac{2cos^7x}{7}-\frac{cos^9x}{9}+C$. **175.** $\frac{5}{8}\sqrt[3]{sin^8x}-\frac{5}{9}\sqrt[3]{sin^{18}x}+\frac{5}{28}\sqrt[3]{sin^{28}x}+C$. **176.** $\frac{3}{5}cos^{\frac{5}{3}}x+3\ cos^{-\frac{1}{3}}x+C$. **178.** $\ln|\text{tg}\,x|-\frac{1}{2sin^2x}+C$. **179.** $2\sqrt{\text{tg}x}+C$. **180.** $4\sqrt[4]{\text{tg}x}+C$. **182.** $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C$. **183.** $\frac{3}{8}x+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C$. **184.** $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$. **185.** $\frac{x}{10}-\frac{\sin 2x}{64}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin 6x}{192}+C$. **186.** $\frac{5}{16}x+\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{48}sin^3 2x+\frac{3}{64}\sin 4x+C$. **188.** $x-2\sqrt{x}+2ln(\sqrt{x}+1)+C$. **189.** $6\sqrt[6]{x}-6arc\text{tg}\sqrt[6]{x}+C$. **190.** $\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}-x+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}+4\sqrt[4]{x}-4\ln(\sqrt[4]{x}+1)+C$. **192.** $2\sqrt{1+x}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right|+\text{C}$. **193.** $\frac{1}{3}(3x+4)-\frac{1}{2}(3x+4)^{2/3}+\sqrt[3]{3x+4}-\ln\left|\sqrt[8]{3x+4}+1\right|+C$. **194.** $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$. **195.** $-\frac{3}{8}\left(\frac{4}{\frac{1-x}{1+x}}\right)^3+C$. **200.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|10x+3+2\sqrt{5}\sqrt{5x^2+2x+2}\right|+C$. **201.** $\frac{1}{\sqrt{2}}arc\sin\frac{4x-3}{5}+C$. **202.** $-\frac{1}{\sqrt{3}}arc\sin\frac{6+5x}{7x}+C$. **203.** $-\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x+5+\sqrt{5}\sqrt{7x^2+2x+5}}{5x}\right|+C$. **204.** $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2-3x+5}+\frac{19}{4\sqrt{2}}\left|x-\frac{3}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x^2-3x+5}\right|+C$. **205.** $-4\sqrt{3-2x-x^2}+3arc\sin\frac{x+1}{2}+C$. **209.** $2arc\sin\frac{x}{2}+\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}+C$. **210.** $\frac{x}{9\sqrt{9+x^2}}+C$. **211.** $\frac{x}{5\sqrt{5-x^2}}+C$. **212.** $\frac{1}{4}arc\cos\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{x^2-4}}{2x^2}+C$. **213.** $\ln\left|x+\sqrt{x^2+5}\right|-\frac{x}{5\sqrt{x^2+5}}+C$. **214.** $\frac{2}{3}\frac{2x+1}{\sqrt{1+x+x^2}}+C$. **215.** $\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\sqrt{2(1+x^2)}}{\sqrt{x^2+2}}\right|+C$. **216.** $\frac{1}{4\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x\sqrt{15}+2\sqrt{4x^2+1}}{x\sqrt{15}-2\sqrt{4x^2+1}}\right|+C$. **218.** $\frac{7}{12}sin^{\frac{7}{12}}x-\frac{7}{26}sin^{\frac{26}{7}}x+C$. **219.** $\ln\left|\frac{x^2-1}{x}\right|+\text{C}$. **220.** $\frac{1}{16}\frac{x}{\sqrt{16+x^2}}+C$. **221.** $\frac{\sin 2x}{8}+\frac{\sin 4x}{16}+\frac{\sin 6x}{24}+\frac{\sin 8x}{32}+C$. **222.** $2e^{\sqrt{x}}+C$. **223.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+2)+\frac{1}{\sqrt{2}}\ arc\text{tg}\frac{x}{\sqrt{2}}+$

$\frac{1}{x^2+2}+C$. **224.** $-\frac{ctg^3x}{3}-\frac{2ctg^5x}{5}-\frac{ctg^7x}{7}+C$. **225.** $\left(\frac{x^2}{4}+x\right)\ln x-\frac{x^4}{16}-x+C$. **226.** $\frac{1}{2}(x+6)\sqrt{x^2-4x+1}+\frac{13}{2}\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+1}\right|+C$. **227.** $2\ln|x-1|+\ln|x^2+x+1|+C$. **228.** $\ln\left|1+\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+C$. **229.** $arc\mathrm{tg}\,x\ln|arc\mathrm{tg}\,x|-arc\mathrm{tg}\,x+C$. **230.** $\frac{x}{\sqrt[6]{1+x^6}}+C$. **231.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{x^2+2x+3}}{x+1}\right|+C$. **232.** $\frac{5}{16}x+\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{48}sin^3\,2x+\frac{3}{64}\sin 4x+C$. **233.** $-\frac{12}{5}x^{\frac{5}{12}}+3x^{\frac{1}{3}}-4x^{\frac{1}{4}}-12x^{\frac{1}{12}}+6\ln\left|\frac{x^{\frac{1}{12}}+1}{x^{\frac{1}{12}}-1}\right|+C$. **234.** $\frac{sin^5x}{5}+\frac{sin^7x}{7}+C$. **235.** $-(5+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+arc\mathrm{tg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$. **236.** $\ln\left|x+\sqrt{x^2+9}\right|-\frac{\sqrt{x^2+9}}{x}+C$. **237.** $e^{x^3+x+1}+C$. **239.** а) биринчи; б) экинчи; в) биринчи. **241.** а) $6\le I\le 10$; б) $\frac{3}{4}\le I\le\frac{6}{7}$; в) $0\le I\le 1$; **245.** $\frac{7}{4}$. **246.** $\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$. **247.** 0. **248.** $\frac{3}{2}$. **249.** $\frac{3}{32}\left(7\sqrt[3]{4}-12\right)$. **250.** $(arc\mathrm{tg}\,3-arc\mathrm{tg}\,2)=arc\mathrm{tg}\,\frac{1}{7}$. **251.** $\frac{\pi}{6}$. **253.** $\frac{\pi}{6}$. **254.** $\frac{4}{\pi}-1\approx 0{,}273$. **260.** $7+2\ln 2$. **261.** $2-\ln 2$. **262.** $\frac{\pi}{6}$. **263.** $arc\mathrm{tg}\,\mathrm{e}-\frac{\pi}{4}$. **264.** $\ln 2$. **265.** $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. **266.** а) 0; б) 0; в) 2; г) 8. **269.** $1-\frac{2}{e}$. **270.** $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. **271.** $2\ln 2-\frac{3}{4}$. **272.** $3\ln 3-2$. **273.** $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1$. **274.** $\pi^3-6\pi$. **275.** $\frac{e^{\pi}-2}{5}$. **276.** $\frac{1+e(\sin 1-\cos 1)}{2}$. **279.** $I_n=$

$$\begin{cases}\frac{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots 1}{n(n-1)(n-1)\ldots 2}\pi, & n \text{ жуп болгондо}\\ 0, & n \text{ так болгондо.}\end{cases}$$

280. а) $I_8=\frac{35}{128}\pi$; б) $I_{11}=0$. **282.** $\frac{11}{48}+\frac{5}{64}\pi$. **284.** $-6{,}1389$. **286.** $-6{,}0656$. **287.** $0{,}6941$; $|\delta_3|\le\frac{1}{384}<0{,}002$. **289.** а) $-3{,}1399$; б) $-3{,}1416$. **290.** 0,157. **291.** 2,590. **295.** 1. **296.** $\frac{3}{32}\pi^2$. **297.** Таралат. **298.** $\frac{\pi\sqrt{5}}{5}$. **303.** Жыйналат. **304.** Таралат. **305.** Жыйналат. **306.** Таралат. **307.** Таралат. **310.** Таралат. **311.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **312.** Таралат. **313.** Таралат. **317.** Жыйналат. **318.** Таралат. **319.** Таралат. **320.** Жыйналат. **324.** 2. **325.** $\frac{32}{3}$. **326.** $\frac{(e-1)^2}{e}$. **327.** $3-e$. **328.** $\frac{4}{3}p^2$. **329.** $\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}$; $\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{3}$. **330.** πab. **331.** $\frac{8}{3}\pi a^2$. **332.** $\pi(2a^2+b^2)$. **335.** $\frac{3}{2}\pi a^2$. **336.** $\frac{9}{2}\pi$. **337.** $\frac{28}{3}\pi^3a^2$. **338.** $\frac{1}{4}\pi a^2$. **343.** $8a$. **344.** $\frac{1}{2}\pi\mathrm{T}^2$. **345.** $1+\frac{1}{2}ln\frac{3}{2}$. **346.** $\ln(2+\sqrt{3})$. **347.** $a\,[2\pi\sqrt{16\pi^2+1}+\frac{1}{2}\ln\big(4\pi+$

$\sqrt{16\pi^2+1}\,)]$ **348.** $\sqrt{2}\,a(e^{y_0}-1)$. **349.** **8**a **350.** $a\,sh\,1\approx 1{,}175a$. **351.** $\frac{\pi^3}{3}$. **354 .** $\frac{\pi^2}{2}$. **355 .** $\frac{8}{3}\pi a^2\,b$. **356.** 38,4 π. **357 .** $\frac{32}{105}\pi a^3$. **360.** $\frac{16}{3}\pi a^2(5\sqrt{5}-8)$. **361.** $2\pi[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]$. **362.** $2\pi b^2+\frac{2\pi ab}{\varepsilon}arcsin\ \varepsilon$, мында $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ – эллипстин эксцентриситети. **363.** $\frac{64}{3}\pi a^2$. **366.** $v_0T+\frac{\varrho t^2}{2}$. **367.** $x=x_1+\frac{v_0}{\omega}(sin\,\omega t_2-sin\omega t_1)$. **369.** $9\cdot 10^{-5}$ *дж.* **370.** 1,8 *дж.* **372.** $M_a=\frac{ab^2}{2}$, $M_b=\frac{a^2b}{2}$. **373.** $M_x=\frac{\pi}{4}$, $M_y=\pi,\xi=\frac{\pi}{2}$, $\eta=\frac{\pi}{8}$. **374.** $\xi=\frac{4a}{3\pi}$, $\eta=\frac{4b}{3\pi}$. **375.** $\xi=\pi a$, $\eta=\frac{5}{6}a$. **37**7. $\gamma\frac{ab^2}{2}$ кГ $=9{,}81\gamma\frac{ab^2}{2}$ н. **378.** $\frac{bh^2}{3}m=3270bh^2$ н. **379.** $\frac{(a+2b)h^2}{6}m\approx 111\cdot 10^6$ н. **381.** 1) 123 к, 2) 41 a. **382.** $\frac{1_0}{50\pi}$ к. **383.** 1200 ln 2,2≈ 946 к. **395.** 22 бирд.продук. **396.** $\frac{15}{\ln 2}+4\approx 25{,}64$ (акча бирд). **397.** $84+21\ln 5\approx 117{,}79$ прод. бирд.

А Д А Б И Я Т Т А Р

1. Бутузов В.Ф. Математический анализ в вопросах изадачах.:М., Краснодарь:Лань 2008.
2. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа т 1. Учебник .М.: Наука, 1968.
3. Кручкович Г.И. Сборник задач по курсу высшей математики.: Учебное пособие. М.: Высшая школа, 1973.
4. Шевалдина О. Я. Математика в экономике.: Учебное пособие. Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2016.
5. Ильин В.А. Математический анализ:Учебник ч.1.М.:Проспект: Изд-во МГУ, 2006.
6. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для студентов втузов.ч1. М.: Высшая школа, 1986.

Басууга берилди: 26.09.2025-ж.
Форматы 60x90 1/16. Көлөмү: 9,2 б.т.
Буюртма № 49/25.
“Book-дизайн” полиграфия борбору
Кыргыз Республикасы, Ош шаары, И. Сулайманов көч. 3.